

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(4) Grupy a tělesa

Cv. 1. Zjistěte, zda je grupou:

- (a) (\mathbb{Q}, \cdot) ,
- (b) $(\mathbb{Q}, -)$,
- (c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (d) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (e) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (f) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina \mathcal{F} všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
- (g) množina rotací v \mathbb{R}^2 kolem počátku s operací skládání zobrazení,
- (h) množina posunutí v \mathbb{R}^2 s operací skládání zobrazení.

Cv. 2. Vyplňte tabulku pro binární operaci \circ na \mathbb{G} tak aby (\mathbb{G}, \circ) byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

\circ	0	1
0		
1		

(b)

\circ	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

\circ	0
0	

(d)

\circ	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 3. Necht' (\mathbb{G}, \circ) je grupa a $x \in \mathbb{G}$. Rozhodněte, zda $(\mathbb{G}, *)$ je grupou s operací definovanou $a * b = a \circ x \circ b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{G}$.

Cv. 4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

- (a) množina $\{(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým součinem,
- (b) množina $\{(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým součinem.

Cv. 5. Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

- (a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}, 4/3 \in \mathbb{Z}_5$,
- (b) $6 + 7, -7, 6 \cdot 7, 7^{-1}, 6/7 \in \mathbb{Z}_{11}$.

Cv. 6. Nad \mathbb{Z}_5 najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$3x + 2y + z = 1$$

$$4x + y + 3z = 3$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 7. Nalezněte multiplikativní inverzy 9^{-1} a 12^{-1} v \mathbb{Z}_{31} .

Cv. 8. V \mathbb{Z}_7 spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.