4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Diskutujte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Cv. 4.2 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Cv. 4.3 Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.4 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Připomeňme, že elementární operace a příslušné matice jsou:

(a) Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$, lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} & \\ & \\ & \\ i & \\ & \\ & j \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Výměna i-tého a j-tého řádku jde reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \\ i & \\ j & \\ & \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc} i & j \end{array}$$

Cv. 4.5 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Cv. 4.6 Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Cv. 4.7 (a) Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Najděte limitu (pokud nevíte, co je limita, tak použijte intuici)

$$\lim_{k\to\infty} AD^k A^{-1}, \quad \text{kde} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

a určete její hodnost.

(c) Aplikujte předchozí na matici A, jejíž první sloupec i řádek je tvořený jednotkovým vektorem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.