Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (3) Operace s maticemi

Ukázka 1: Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$
(b) $A+B$
(c) $A-B$
(d) C^T
(e) Cv
(f) AB
(g) BC

kde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Ukázka 2: Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Pro libovolnou matici $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$: $A+A=2A$
(b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$: $A=A^T$

Cv. 1. Spočtěte $(-1)A+2BC$, kde A,B,C jsou následující matice:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 2 & 7\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Cv. 2. Vyřešte soustavy rovnic a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ a $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ a $c=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Cv. 4. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A,B,C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α,β platí:

(a) $A+(B+C)=(A+B)+C$
(b) $A+B=B+A$
(c) $A+\mathbf{0}=A$
(d) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
(e) $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$
(f) $A+(-1)A=\mathbf{0}$
(g) $1A=A$
(h) $A(B+C)=AB+AC$
(i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
(j) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(k) $\alpha A+\beta B=(\alpha+\beta)(A+B)$
(l) $(A^T)^T=A$
(m) A^TA je symetrická
(n) $(A+B)^T=A^T+B^T$
(o) $(\alpha A)^T=\alpha(A^T)$
(p) $AI_n=A$

Cv. 5. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Cv. 6. Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.