

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(3) Operace s maticemi

Ukázka 1: Spočítejte následující výrazy:

- (a) $2A$
- (b) $A + B$
- (c) $A - B$
- (d) C^T
- (e) Cv
- (f) AB
- (g) BC

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

- (a) Pokud matice A je řádu $n \times m$ výsledná matice bude také řádu $n \times m$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- (b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2 . Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-1) \\ 2 + 0 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (c) Obdobně jako v předchozím případě, musí A, B být shodného řádu a výsledná matice bude také daného řádu. Výsledek získáme rozdílem po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je rozdílem hodnot z matice A a B na dané pozici. Tedy dostáváme:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 - (-1) \\ 2 - 0 & -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že na rozdíl matic můžeme také pohlížet jako na součet matice A s maticí $(-1)B$.

- (d) Je-li původní matice rozměru $n \times m$, transponovaná matice bude mít rozměry $m \times n$. Její prvek na pozici i, j je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici j, i . Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

- (e) Je-li matice C řádu $m \times n$ musí v být n -složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor.

Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1 .

- (f) Je-li matice A řádu $m \times n$ musí být matice B řádu $n \times o$ a výsledná matice bude řádu $m \times o$. V tomto případě obě matice A, B jsou řádu 2×2 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude také řádu 2×2 .

Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (g) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times o$ a výsledná matice bude řádu $m \times o$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3 .

Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ukázka 2: Dokažte nebo vyvráťte:

- (a) Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $A + A = 2A$
 (b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $A = A^T$

Řešení:

- (a) Nejprve ověříme, že obě strany mají smysl.

Pro levou stranu potřebujeme ověřit, že sčítání dává smysl. Tedy potřebujeme, aby obě matice v součtu byly stejného řádu. To je pravda ať zvolíme A libovolně, tedy levá strana má smysl vždy.

Pozor na opomíjení tohoto kroku. Může se stát, že tvrzení platí ale pouze pokud obě strany dávají smysl. Uvažte například následující tvrzení: Pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{o \times p}$: $A + B - B = A$

Na pravé straně násobíme matici A konstantou 2. Tuto operaci můžeme provést s libovolnou maticí A , tedy pravá strana má také vždy smysl.

Poté zkontrolujeme rozměry matice na levé a pravé straně. Na levé straně sčítáme 2 matice řádu $m \times n$ a výsledkem je, dle definice sčítání matic, matice řádu $m \times n$. Na pravé straně násobíme matici řádu $m \times n$ konstantou a výsledkem je, dle Definice 3.3 (Násobek), matice řádu $m \times n$. Obě strany mají tedy shodné rozměry. *Všimněte si, že při dokazování se odkazujeme na definice z přednášky. Podobně bychom se mohli odkazovat i na věty, lemmata, atp.*

Pozor, pokud tento krok opomenete, může se stát, že matice na levé straně má n řádků a m sloupců, kdežto na pravé straně je jich více. Po složkách můžete ukázat, že levou horní podmatici velikosti $n \times m$ mají obě strany shodnou, ale to nedokazuje rovnost obou stran (která neplatí)!

Nakonec můžeme ukázat rovnost po složkách. Pro libovolný řádek i a sloupec j se podíváme na i, j -tou složku levé strany a ukážeme, že je rovna i, j -té složce pravé strany:

$$\begin{aligned} [A + A]_{i,j} &= A_{i,j} + A_{i,j} && \text{(rozepíšeme dle definice sčítání)} \\ &= 2A_{i,j} && \text{(nyní pracujeme s čísly z } \mathbb{R}, \text{ tedy můžeme sečíst)} \\ &= [2A]_{i,j} && \text{(použijeme definici násobení matice konstantou)} \end{aligned}$$

- (b) Pokud tvrzení neplatí uvádíme protipříklad. Tedy zvolíme matici A , která splňuje předpoklady ale neplatí pro ni závěr.

V tomto případě můžeme třeba za A zvolit následující matici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jediný předpoklad je, že A je čtvercová a ten je pro náš příklad zjevně splněn. Zároveň $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Pokud splnění některého z předpokladů (resp. nesplnění závěru) není triviální, mělo by být součástí řešení zdůvodnění proč předpoklady platí (resp. závěr neplatí).

Případně můžeme dodat za jakých předpokladů by tvrzení platilo. V tomto případě bychom potřebovali A symetrickou.

Cv. 1. Spočtete $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} & (-1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 23 & 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 16 & 2 \cdot 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 46 & -1 + 26 \\ -4 + 32 & -1 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cv. 2. Vyřešte soustavy rovnic a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešením druhé soustavy rovnic $By = c$ je vektor $y = (-1 - t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1 - t) + 1 \cdot t + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1 - t) + 1 \cdot t + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1 - t) + 2 \cdot t + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i -tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, i zaměníme 1 za α . Násobením touto maticí **zleva** násobíme i -tý řádek konstantou α .

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in [m]$ a sloupec $k \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned} [AD]_{j,k} &= \sum_l A_{j,l} D_{l,k} \\ &= A_{j,j} D_{j,k} && (A_{j,l} \neq 0 \text{ pouze pro } l = j) \\ &= \begin{cases} D_{j,k} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{j,k} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{j,j}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i -tého shodné s maticí D a i -tý řádek je vynásoben skalárem α .

(b) Prohození i -tého a j -tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a prohodíme její i -tý a j -tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i -tý a j -tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom BD je také

matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned}
 [BD]_{k,l} &= \sum_{\ell'} B_{k,\ell'} D_{\ell',l} \\
 &= \begin{cases} B_{k,k} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ B_{k,i} D_{i,l} & \text{pro } k = j \\ B_{k,j} D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{pro ostatní hodnoty } \ell' \text{ je } B_{k,\ell'} = 0) \\
 &= \begin{cases} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ D_{i,l} & \text{pro } k = j \\ D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } B)
 \end{aligned}$$

Vidíme, že BD má všechny řádky kromě i -tého a j -tého shodné s maticí D a i -tý a j -tý řádek jsou prohozeny.

- (c) Přičtení α -násobku i -tého řádku k j -tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, j zaměníme nulu za α . Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α -násobek j -tého řádku k i -tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a C je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom CD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned}
 [CD]_{k,l} &= \sum_{\ell'} C_{k,\ell'} D_{\ell',l} \\
 &= \begin{cases} C_{k,k} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ C_{k,k} D_{k,l} + C_{k,j} D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
 &\quad (\text{pro ostatní hodnoty } m \text{ je } C_{k,\ell'} = 0) \\
 &= \begin{cases} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ D_{k,l} + \alpha D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
 &\quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } C)
 \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i -tého zůstaly zachovány a k i -tému řádku jsme přičetli α násobek j -tého řádku.

Cv. 4. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

- | | |
|---|--|
| (a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | (i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ |
| (b) $A + B = B + A$ | (j) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ |
| (c) $A + \mathbf{0} = A$ | (k) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$ |
| (d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ | (l) $(A^T)^T = A$ |
| (e) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ | (m) $A^T A$ je symetrická |
| (f) $A + (-1)A = \mathbf{0}$ | (n) $(A + B)^T = A^T + B^T$ |
| (g) $1A = A$ | (o) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$ |
| (h) $A(B + C) = AB + AC$ | (p) $AI_n = A$ |

Řešení:

(a) Tvrzení platí.

Prvně ukážeme, že levá i pravá strana dávají smysl a mají stejné rozměry. Matice A, B, C jsou všechny stejného řádu, označíme si jejich rozměry jako $m \times n$. Pak na levé straně sčítáme $B + C$, což jsou obě matice řádu $m \times n$ a dostáváme novou matici řádu $m \times n$. Tu přičítáme k matici A , která je rovněž řádu $m \times n$. Tedy levá strana dává smysl a výsledkem je matice řádu $m \times n$.

Obdobně pro pravou stranu dostáváme že $(A + B) + C$ dává smysl a výsledkem je vždy matice $m \times n$.

Nyní ukážeme, že se matice rovnají porovnáním po složkách. Pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$ platí:

$$\begin{aligned}
 [A + (B + C)]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [(B + C)]_{i,j} \\
 &= [A]_{i,j} + ([B]_{i,j} + [C]_{i,j}) \\
 &= ([A]_{i,j} + [B]_{i,j}) + [C]_{i,j} \quad (\text{asociativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
 &= [(A + B)]_{i,j} + [C]_{i,j} \\
 &= [(A + B) + C]_{i,j}.
 \end{aligned}$$

(b) Tvrzení platí.

Podobně jako v předchozím příkladě. Nejprve ukážeme, že obě strany dávají pro všechny uvažované matice A, B smysl a výsledky mají shodné rozměry. Poté ukazujeme rovnost po složkách, tedy pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$:

$$\begin{aligned}
 [A + B]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \\
 &= [B]_{i,j} + [A]_{i,j} \quad (\text{komutativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
 &= [B + A]_{i,j}
 \end{aligned}$$

(c) Tvrzení platí.

(d) Tvrzení platí.

- (e) Tvrzení platí.
- (f) Tvrzení platí.
- (g) Tvrzení platí.
- (h) Tvrzení platí (jedná se o distributivitu násobení a sčítání). Aby obě strany dávaly smysl musí A, B, C splňovat:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

(jinak nedává ani jedna strana smysl). Díky předpokladu, že A, B, C jsou stejného řádu, tedy musí být všechny matice čtvercové.

- (i) Tvrzení platí.
- (j) Tvrzení platí.
- (k) Tvrzení neplatí.

Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B , která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2, \beta = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)(A + B).$$

- (l) Tvrzení platí.

Je-li A matice řádu $m \times n$, pak A^T je matice řádu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět matice řádu $m \times n$. Tedy matice na pravé i levé straně mají shodné rozměry. Poté dokazujeme rovnost po složkách, pro všechny $i \in [m]$ a $j \in [n]$.

$$[(A^T)^T]_{i,j} = [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

- (m) Tvrzení platí.

Matice D je symetrická pokud platí $D = D^T$. Prvně si uvědomme, že pokud matice A je rozměrů $m \times n$, pak matice A^T je rozměrů $n \times m$. Násobení matic $A^T A$ tedy dává smysl a jeho výsledkem je matice rozměrů $n \times n$.

Dále dle Věty 3.13 (Vlastnosti transpozice) ze skript víme, že pro všechny matice D, E vhodných rozměrů (takových aby šly vynásobit) platí $(DE)^T = E^T D^T$. Proto dostáváme:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T && \text{(dle } (DE)^T = E^T D^T \text{)} \\ &= A^T A. && \text{(předchozí tvrzení)} \end{aligned}$$

- (n) Tvrzení platí.
- (o) Tvrzení platí.
- (p) Tvrzení platí pouze pokud A je matice řádu $m \times n$ pro nějaké m a n shodující se s I_n . Jinak levá strana nedává smysl.

Cv. 5. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruuje symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:

Pro první část můžeme vybrat například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tvrzení neplatí ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq \\ &\neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = BA. \end{aligned}$$

Cv. 6. Dokažte nebo vyvráťte:

- Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B , pak A komutuje s B^T .
- Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B , pak A komutuje s B^T .

Řešení:

- Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.
- Tvrzení neplatí, například

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$