

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(2) Soustavy lineárních rovnic

Ukázka 1 (Gaussova–Jordanova eliminace). Vyřešte Gaussovou–Jordanovou eliminací soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 - 1x_2 + 2x_3 &= 3, \\x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\5x_1 - 9x_2 + 6x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Ukázka 2 (Soustava s parametrem). Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & a+1 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2a & 2 \end{array} \right).$$

Cv. 1. Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\-3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

Cv. 2. Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic:

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

Cv. 3. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Cv. 4. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Cv. 6. Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Cv. 7. Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$