1. Rozhodněte, zda je relace kolmosti reflexivní, ireflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní.

2. Dokažte, že pokud matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je tvořena n ortonormálními sloupci, pak $A^T A = I_n$. Dokažte, že má matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortonormální sloupce (resp. řádky) pak má i ortonormální řádky (resp. sloupce).

3. Najděte matici přechodu $_B[id]_K$ (od kanonické báze k bázi B), kde B je ortonormální báze daná sloupci matice
$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Spočítejte souřadnice vektoru $[u]_K = (1, 2, 3)^T$ vůči bázi B (tj. chceme $[u]_B$).

4. Určete souřadnice vektoru $(1, 4, 2, 2)^T$ vůči ortonormální bázi:
$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right\}$$

5. Určete bázi ortogonálního doplňku řádkového prostoru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi řádkových prostorů následujících matic:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

7. Určete ortonormální bázi (pomocí G-S) řádkového prostoru následující matice a tu rozšiřte na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Domácí cvičení (středa 4.3. půlnoc – deadline)

1. Vyřešte Příklad 6 pro matici c výše.
2. Ukažte, že sloupce Hadamardovy matice $H_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ definované jako

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix},$$

jsou ortonormální.