1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$
   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$
   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$
   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ (respektive $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ pro komplexní čísla).

   Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

   Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

2. Označme řádky matice A jako vektory $v_1, \ldots, v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

3. Spočtěte normu následujících vektorů:

   (a) $(4, 0, 3)^T$
   (b) $(1, 2, 2)^T$

4. Mějme dva kolmé vektory u, v takové že $\|u\| = 2$ a $\|v\| = 4$. Lze ze zadaných informací zjistit kolik je $\|u - v\|$ a $\|u + v\|$.

5. Ukažte, že následující je skalární součin:

$$\langle x, y \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i)$$

6. Rozhodněte, zda je relace kolmosti reflexivní, ireflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní.

7. Mějme vektor $u = (1, 3)^T$. Spočtěte jeho projekci na přímku určenou **jednotkovým** vektorem $v = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)^T$. Co by se stalo, kdyby v nebyl jednotkový?

8. Mějme dva vektory $(2, 4)^T$ a $(3, 1)^T$. Jaký násobek druhého musíme odečíst od prvního, aby výsledek byl kolmý na druhý? Jaký násobek prvního musíme odečíst od druhého, aby výsledek byl kolmý na první?

Domácí cvičení (středa 26.2. půlnoc – deadline)

1. Ukažte, že následující je skalární součin:

$$\langle x, y\rangle = x^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

2. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1,2,1)^T, (2,0,1)^T, (2,1,-4)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je norma prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

3. Spočtěte inverzi následující matice, jejíž řádky (i sloupce) tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Všimli jste si na výsledku něčeho zvláštního?

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$