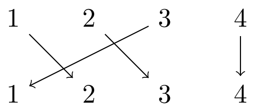
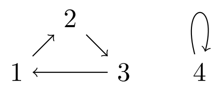
1. Dokažte, že v každé grupě pro každé a existuje právě jeden inverzní prvek.
2. Dokažte, že v každé grupě existuje právě jeden jednotkový prvek.
3. Dokažte, že v každé grupě je možné krátit zprava, tedy z $a \circ c = b \circ c$ plyne $a = b$.
4. Dalším velice důležitým příkladem jsou grupy permutací značené S_n (kterým se říká symetrické grupy). Kde prvky jsou permutace na množině $\{1, \dots, n\}$ a operace $\circ$ je skládání permutací. Dokažte, že toto je grupa.

   Připomeňme, že permutace je bijekce $\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Permutaci můžeme zapsat jako tabulku hodnot, graficky znázornit pomocí šipek které ukazují který prvek se zobrazí na který. Navíc permutaci můžeme zapsat i jako permutační matici, která má v každém řádku i každém sloupci právě jednu jedničku a jinde nuly.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$



Obrázek 1: Bipartitní znázornění permutace.



Obrázek 2: Znázornění permutace pomocí orientovaného grafu.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kolik je různých permutací na n prvkové množině?

Definujme množinu inverzí permutace π jako $I(\pi) = \{(i, j) \mid i < j \text{ a zároveň } \pi(i) > \pi(j)\}$. Znaménko permutace se definuje jako $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{|I(\pi)|}$. Znaménko lze definovat i jinými ekvivalentními způsoby.

Jaké je znaménko identity? Transpozice je permutace, která zamění dva prvky. Jaké je znaménko transpozice? Lze každou permutaci dostat jako složení transpozic?

Tvoří permutace znaménka 1 grupu? Co permutace znaménka -1?

Cyklus permutace je orientovaný cyklus v orientovaném grafu $(\{1, \dots, n\}, \{(i, j) \mid j = \pi(i)\})$ (máme povolené smyčky).

Která permutace má nejvíc cyklů? Existuje permutace, která má pouze jeden cyklus?

Permutaci můžeme zapsat pomocí jejích cyklů tak, že seřadíme její cykly sestupně podle jejich minimálních prvků a zapíšeme je za sebe tak, že začneme vždy minimálním prvkem cyklu. Tedy naše ukázková permutace je zapsaná takto: 4123, což odpovídá cyklům (4)(123). To je ovšem jiná permutace, než permutace 4132, která odpovídá cyklům (4)(132).