1. Definujte grupu. Důležitou třídou grup jsou komutativní grupy, ty si dokonce vysloužily vlastní jméno a říkáme jim Abelovy (abelovské). Připomeňte i definici komutativity.

2. Je daná operace binární operací (a) na množině $\mathbb{R}$, (b) na množině kladných přirozených čísel $\mathbb{N}^+$?

   (a) sčítání,

   (b) odčítání,

   (c) dělení,

   (d) násobení

3. Najděte příklady binární operace na vhodné množině, která

   (a) je asociativní i komutativní,

   (b) je asociativní, ale není komutativní,

   (c) není ani komutativní, ani asociativní,

   (d) je komutativní, ale není asociativní.

4. Pro kladné celé číslo n a dvě celá čísla a, b řekneme, že a, b jsou kongruentní modulo n psáno $a \equiv b \pmod n$, právě když n dělí $a - b$ (tedy $a - b$ je celočíselným násobkem n). Ověřte, jestli následující jsou grupy, případně Abelovy grupy:

   (a) Regulární matice $\mathbb{R}^{12\times 12}$ s operací $\circ$ maticové násobení.

   (b) $(\mathbb{N}, \circ)$, kde $a \circ b = \max\{a, b\}$.

   (c) Binární čísla dlouhá n číslic (2^n) a operace je xor (exkluzivní or, tedy $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ a $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Pro více bitová čísla počítáme po jednotlivých složkách, tedy například $1100 \oplus 0111 = 1011$.

   (d) Nosná množina jsou dvojice reálných čísel (píšeme $\mathbb{R}^2$) a binární operace je dána $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

   (e) Otočení čtverce.

   (f) Otočení a symetrie čtverce.

   (g) Otočení pravidelného čtyřstěnu.

   (h) Oblíbené hlavolamy často tvoří grupu (Rubikova kostka, Loydova patnáctka).

   (i) Sčítání celých čísel modulo 6.

   (j) Násobení nenulových čísel modulo 6.

   (k) Násobení nenulových čísel modulo 5.