1. Mějme bázi $B$ danou vektory:

   $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T, (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)^T$

   Najděte matici přechodu od kanonické báze k bázi $B$. Najděte souřadnice vektoru $(3, 1, 4, 1)^T$ v bázi $B$. Čeho si všimnete na matici ${}_B[id]_K$?

2. Buď $V$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$
   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$
   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$
   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ (respektive $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ pro komplexní čísla).

   Řekneme, že vektory $u, v$ jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\varphi)$, kde $\varphi$ je úhel mezi vektory $x, y$ (porovnejte s definicí kolmosti).

   Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

3. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

4. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

5. Označme řádky matice $A$ jako vektory $v_1, \ldots, v_m$ a sloupce matice $B$ vektory $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice $AB$?

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

6. Pro skalární součin definovaný $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

7. O symetrické matici reálné $A$, pro kterou platí $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y \rangle = x^T A y$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když $A$ je pozitivně definitní.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici $A$, která ho určuje.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

8. Dokažte, že všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 0$ tvoří vektorový prostor. Jinak řečeno $\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 0 \right\}$ tvoří vektorový prostor.

   Dokažte, že všechny vektory z $\mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 2$ tvoří afinní prostor (a to rovinu).

9. Mějme dva vektory $(2, 5)^T, (3, 1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

10. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

    Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Pro zvídavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).