

NDMI025 – Pravděpodobnostní algoritmy

LS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 20. března

Termín: 26. března před přednáškou
Cvičení k tomuto úkolu budou 27. března

(1) Lízatko je graf, kde $\lceil n/2 \rceil$ vrcholů indukují cestu, zbylých $\lfloor n/2 \rfloor$ vrcholů spolu s jedním koncovým vrcholem indukují kliku (úplný graf), a který neobsahuje žádné další hrany. Nechť u je nějaký vrchol mimo cestu a v je vrchol stupně jedna (tj. koncový vrchol cesty neobsažený v klice). Spočítejte asymptoticky h_{uv} (hitting time, průměrný první čas dosažení v z u) a h_{vu} , případně (za bod) jejich velikost alespoň intuitivně zdůvodněte.

(2)

(a) Najděte orientovaný graf na n vrcholech s co největším h_{uv} (hitting time, průměrný první čas dosažení v z u) pro nějaké vrcholy u a v . (Nemusíte dokazovat, že je největší možný.)

(b) Najděte Turingův stroj pracující v prostoru $O(\log n)$ takový, že se zastaví s pravděpodobností 1, ale očekávaný (průměrný) čas běhu je co největší. Vyřešení (a) by měla být nápověda.

(3) Dokažte, že $NP \subseteq BPP$ implikuje $NP = RP$.

(4) Nechť G je souvislý d -regulární graf na n vrcholech a λ_i je i té největší vlastní číslo matice sousednosti grafu G .

Pak je ekvivalentní:

(i) G je bipartitní,

(ii) $\lambda_n = -\lambda_1$ a

(iii) pro každé i platí $\lambda_{n-i} = -\lambda_i$.

Bonus: Platí totéž i pro grafy, které nejsou d -regulární?