# TOTÁLNĚ UNIMODULÁRNÍ MATICE

Def: Matice $A$ je totálně unimodulární, když determinant každé čtvercové podmatice je $0, -1$, nebo $1$

[V] Nechť $A$ je totálně unimodulární a $b \in \mathbb{Z}^m$. Pak polyedr $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ má všechny vrcholy celočíselné a úloha LP $\max c^T x$, $Ax \leq b$ má celočíselné optimum

Dk: vrchol $= A_B^{-1} \cdot b$ pro nějakou bázi.

Tot. unim. matice má prvky $0, \pm 1$

Pozorování: Přidání řádku/sloupce s jedinou 1 a nulami nezmění tot. unimodularitu

Vynásobení řádku $-1$ také nezmění tot. unim.

Transpozice — " —

[V] Nechť $A$ má max. 2 nenuly ve sloupci. Nechť sloupcové součty jsou $0, \pm 1$. Pak $A$ je tot. unimodulární.

Příklad: Incidenční matice orientovaného grafu

[V] Nechť $A$ má max. 2 nenuly ve sloupci. Pak je tot. unim právě když se dá vynásobením řádků $-1$ dostat do tvaru z předchozí věty.

Dk: jen náznak

Příklad Incidenční matice neorientovaného grafu $G$ je tot. unimodulární $\Leftrightarrow$ $G$ je bipartitní

# BIPARTITNÍ PÁROVÁNÍ

$G = (V, E)$ neor. bipartitní graf, ~~bez izolovaný~~

$\max \sum x_e$

$\forall v \in V \quad \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1$

$x_e \geq 0$

zlomkové párování

DUÁL:

$\min \sum y_u$

$\forall e = \{u, v\} \quad y_u + y_v \geq 1$

$y_u \geq 0$

zlomkové vrcholové pokrytí

Pozor: Matice soustavy je tot. unimodulární

Dk: ~~incidence~~ Matice incidence + řádky s jedinou 1

$\Rightarrow$ existuje celočíselné optimum

$\Rightarrow$ existuje 0-1 optimum (ze struktury)

$\boxed{V}$ (König) V bipartitním grafu je

$\max\{|M| : M \text{ je párování}\} = \min\{|C| : C \text{ je vrch. pokrytí}\}$

Pro obecné grafy neplatí
- párování $\in P$
- vrcholové pokrytí NP-úplné

2 věty o komplementaritě:

$\{u,v\} = e \in M \quad \ldots \quad x_e^* = 1 \Rightarrow y_u^* + y_v^* = 1 \quad |C \cap \{u,v\}| = 1$

$v \in C \quad y_v^* = 1 \Rightarrow \exists e \; v \in e \in M$