DUALITA LP

Příklad: $\max\ x_1 + x_2 + x_3$

tak, že
$$x_1 - x_2 \le 1 \quad \cdot y_1$$
$$x_2 + x_3 \le 1 \quad y_2$$
$$2x_2 - x_3 \le 1 \quad \cdot y_3$$
$$2x_2 + x_3 \le 5 \quad \cdot y_4$$

$$y_1 x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4) x_2 + (y_2 - y_3 + y_4) x_3 \le y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ je řešení. Jak získáme horní odhad?

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 = y_3 \quad y_4 = 1$ dá $\quad x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{4}{3} \quad y_3 = \frac{1}{3}$ dá $\quad x_1 + x_2 + x_3 \le \frac{8}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{1}{3}$ je optimální řešení

DUÁLNÍ LP: Hledá optimální koeficienty $y_1, \dots, y_m$

$$\min\ y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4$$
$$y_1 = 1$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 1$$
$$y_2 - y_3 + y_4 = 1$$

OBECNĚ: Duální LP získáme takto: (primární $Ax \le b, \max c^T x$)

Duální Proměnná y_j pro každou primární podmínku

$y_j \in \mathbb{R}$ pro podmínka $\sum_i a_{ji}^T x_i = b_j$

$y_j \ge 0$ $\qquad \sum_i a_{ji}^T x_i \le b_j$

D. Podmínka pro každou prim. proměnnou

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

$$\sum a_{ji} y_j \ge c_i \qquad x_i \ge 0$$

a cílje $\min \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$

Pozorování: Duální LP k duálnímu LP je původní LP.

Důležité případy: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

(P) $\max c^T x$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

(D) $\min b^T y$
$$A^T y = c$$
$$y \geq 0$$

($\overline{P}$) $\max c^T x$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

($\overline{D}$) $\min b^T y$
$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

$\boxed{V}$ (Slabá věta o dualitě) Nechť x, y jsou přípustná řešení (P) a (D). Pak $c^T x \leq b^T y$

Dk: $y^T A x \leq y^T b$ z prim. úlohy (P) a $y \geq 0$

$y^T A x = c^T x$ z duální úlohy (D)

$\boxed{V}$ (O dualitě) Pro úlohy (P) a (D) [nebo ($\overline{P}$) a ($\overline{D}$)] nastává jedna z možností:

(1) Ani (P) ani (D) nemá přípustné řešení.

(2) Jedna z nich je neomezená a druhá nemá příp. řešení.

(3) (P) i (D) mají přípustné řešení. Pak existují optimální řešení x^* pro (P) a y^* pro (D) a platí
$$c^T x^* = b^T y^*$$