AFINNÍ A KONVEXNÍ KOMBINACE

ZNAČENÍ: $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ $\quad x + A = \{x + a \mid a \in \mathbb{R}^d\}$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní prostor pokud $A = x + L$ pro $x \in \mathbb{R}^d$, L = vekt. pr.

afinní obal ~~X~~ množiny $X \in \mathbb{R}^d$ je průnik všech a.p. $A \supseteq X$

afinní kombinace bodů $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ je bod / výraz

$$\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n \quad \text{pro } \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$$

Def: ~~Def / Pozn~~: $a_0, \dots, a_n$ jsou afinně nezávislé pokud neex. netriviální $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 0$ t. že $\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

Pozn: $a_0, \dots, a_n$ af. nez. $\Longleftrightarrow$ $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ lineárně nezávislé

Def: dimenze X je dimenze afinního obalu X

Pozorování: dimenze X = max d t. že ex. afinně nz

~~Def~~ $\boxed{V}$ Afinní obal $X = \{\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n \mid a_0, \dots, a_n \in X; \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1\}$

Def: $X \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní pokud $\forall x, y \in X \ \forall t \in [0,1] \ tx + (1-t)y \in X$

konvexní obal X je $\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{Y \mid Y \subseteq \mathbb{R}^d, Y \supseteq X, Y \text{ konvexní}\}$

konvexní kombinace ...

$$\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$$

$\boxed{V}$ $\operatorname{conv}(X) = \dots$

$\boxed{V}$ (Carathéodory) Nechť $\dim(X) = d$. Pak

$$\operatorname{conv}(X) = \{\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_d a_d \mid a_0, \dots, a_d \in X; \alpha_0, \dots, \alpha_d \geq 0, \alpha_0 + \dots + \alpha_d = 1\}$$

Dk: Vezmi min. konv. komb.

$k > d \Rightarrow$ af. závislost $\Rightarrow$ zmenši k

Def: nadrovina v $\mathbb{R}^n$
poloprostor v $\mathbb{R}^n$

$\boxed{V}$ $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní (uzavřené), C omezená, $C \cap D = \emptyset$.
Pak existuje oddělující nadrovina

Dk: $c \in C$, $d \in D$ tak, že $\|c-d\|$ je minimální
h nadrovina kolmá k cd, procházející středem

$\boxed{\text{Def}}$ Konvexní mnohostěn (= polyedr, polyhedron)
je průnik konečně mnoha poloprostorů

Omezený konvexní mnohostěn = polytop(e)

Pozn: dimenze - nadefinovaná
ekviv. - množina přípustných řešení LP

uzavřená množina
(Minkowsky-Weyl)

$\boxed{V}$ X je omezený konvexní mnohostěn
právě když
($\exists V$ konečná) $\operatorname{conv}(V) = X$

Příklady: Krychle / hyperkrychle
Osmistěn / zobecněný osmistěn
Simplex / pravidelný simplex