Aproximační a pravděpodobnostní algoritmy
NDMI084 – ZS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 1 – 11. října

Termín: 21. října

Zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou; ostatní listy a další úkoly podepište jednou z variant.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.

(1) Předpokládejme, že je vhodným způsobem dáno reálné číslo $x \in (0,1)$. Dále je k dispozici posloupnost nezávislých náhodných bitů s uniformním rozdělením. Navrhněte (pod)program, který vrátí ANO s pravděpodobností přesně x a NE s pravděpodobností $1-x$. Uveďte, kolik bitů z posloupnosti čte Váš podprogram v nejhorším případě a jaký je očekávaný počet přečtených náhodných bitů. Rozlište tři varianty:
(a) x je tvaru $i/2^n$.
(b) x je racionální, třeba $1/3$ nebo $7/13$.
(c) x je iracionální, třeba $1/e$.

(2) V problému MAX-SAT je dána CNF formule a cílem je najít přiřazení proměnným takové, že je co nejvíce klauzulí splněno. Uvažte následující algoritmus: Vezměme dvě přiřazení, jedno nastaví všechny proměnné na 0, druhé nastaví všechny proměnné na 1. Výstupem je lepší z těchto dvou přiřazení.
(a) Jaký je aproximační poměr tohoto algoritmu? Měli byste najít přesnou odpověď, tj. konstantu R, důkaz, že algoritmus je R-aproximační a příklad, ukazující, že algoritmus není r-aproximační pro žádné $r < R$.
(b) Předpokládejme, že uvažujeme libovolný algoritmus, který zkouší konstantně mnoho různých přiřazení. (Tj. jejich počet nezávisí na vstupu.) Jakého nejlepšího aproximačního poměru můžete dosáhnout?

(2) Najděte příklad grafů, které ukazují, že (i) algoritmus pro metrický TSP používající obcházení minimální kostry není lepší než 2-aproximační a (ii) Christofidesův algoritmus pro metrický TSP používající není lepší než 3/2-aproximační.
Použili jste v (i) a (ii) stejné grafy? Proč?

(3) Máme tři mince, které mají na obou stanách čísla. Dohromady tedy máme 6 čísel, o kterých předpokládáme, že jsou různá. Vezmeme dvě mince, A a B, každá dopadne na stůl danou stranou nezávisle se stejnou pravděpodobností. Mince s větším číslem vyhrává. Označíme $A \succ B$ jestliže A vyhraje s pravděpodobností větší než $1/2$. Tedy například $(3,4) \succ (1,2)$ a pro mince $(1,4)$ a $(2,3)$ relace neplatí ani v jednom pořadí (pochopitelně (a,b) je mince s čísly a a b).
(a) Zjistěte, zda relace $\succ$ je tranzitivní pro tři mince s různými čísly.
(b) Obdobně pro případ, kdy místo mincí se dvěma hodnotami máme zařízení se třemi hodnotami padajícími stejně často. (Jak může taková věc vypadat?) Zjistěte, zda relace $\succ$ je tranzitivní, pokud je všech 9 čísel různých.