NDMI018 – Aproximační a online algoritmy
LS 2014 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 17. března

Termín: 30. března nebo na přednášce 31. března

Pokud jste to neudělali u prvních úkolů, zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení podepište alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou. Všechny listy podepište buď jménem nebo přezdívkou.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.
Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Na přednášce jsme ukazovali 2-aproximační algoritmus pro (vážené) vrcholové pokrytí založený na lineárním programování. (Omezení byla $x_u + x_v \geq 1$ pro každou hranu uv.) Dokažte, že tento lineární program má poloceločíselné optimum, tj. optimum takové, že $x_u \in \{0; 1/2; 1\}$ pro všechny vrcholy u. Použijte toto tvrzení k nalezení 3/2-aproximačního algoritmu pro vrcholové pokrytí rovinných grafů. Může se Vám hodit věta o čtyřech barvách. (A nemusíte ji dokazovat.)

(2) Uvažujme lineární program pro MAX-SAT stejný jako v algoritmu LP-SAT na přednášce a (y^*, z^*) jeho optimální řešení. Nechť

$$f(p) = \begin{cases} \frac{3}{4}p + \frac{1}{4} & \text{for } p \leq \frac{1}{3}\,, \\ \frac{1}{2} & \text{for } \frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3}\,, \\ \frac{3}{4}p & \text{for } p \geq \frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

Uvažme algoritmus, který každou proměnnou x_i vybere nezávisle náhodně tak, že $x_i = 1$ s pravděpodobností $f(y_i^*)$, jinak $x_i = 0$. Dokažte, že tento algoritmus je 3/4-aproximační.

(3) Navrhněte $O(\sqrt{n})$-aproximační algoritmus pro barvení 3-obarvitelných grafů. (Jinými slovy, je dána optimální hodnota, kterou aproximujeme. Ale stále není lehké najít dobré řešení, tj. obarvení.) Nejprve obarvěte vrcholy vysokého stupně a jejich okolí.

Pro zbývající úlohy definujeme problém půjčování auta. Parametry jsou A a B, cena půjčení a koupě auta. Pokaždé, když pojedete na výlet, musíte se rozhodnout, zda auto půjčit nebo koupit. Dopředu nevíte, kolikrát pojedete, dokonce ani v daný den nevíte, zda nejedete naposledy. Optimální cena při n dnech je tedy $\min\{nA, B\}$, online cena může být buď nA nebo $iA + B$ pokud dne $i + 1$ auto koupíte. Kompetitivní poměr nesmí záviset na A a B. (Ekvivalentně můžete normalizovat na $A = 1$ s tím, že v definici kompetitivního poměru nepovolíte aditivní konstantu.)

(4) Najděte optimální deterministický algoritmus.

(4*) Najděte lepší pravděpododbnostní algoritmus. Nejlépe optimální algoritmus a dokažte to o něm.