

NDMI018 – Aproximační a online algoritmy

LS 2012 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 25. března

Termín: úterý 10. dubna

Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.

Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Na první přednášce jsme ukazovali 2-aproximační algoritmus pro (vážené) vrcholové pokrytí založený na lineárním programování. (Omezení byla $x_u + x_v \geq 1$ pro každou hranu uv .) Dokažte, že tento lineární program má poloceločíselné optimum, tj. optimum takové, že $x_u \in \{0; 1/2; 1\}$ pro všechny vrcholy u . Použijte toto tvrzení k nalezení 3/2-aproximačního algoritmu pro vrcholové pokrytí rovinných grafů. Může se Vám hodit věta o čtyřech barvách. (A nemusíte ji dokazovat.)

(2) Uvažte analogický lineární program pro k -uniformní hypergrafy. (Tj. každá hrana má právě k vrcholů.) Analogické tvrzení by říkalo, že existuje optimální řešení příslušného LP takové, že každá proměnná má hodnotu i/k pro nějaké celočíselné i . Najděte příklad hypergrafu, pro který takové tvrzení neplatí! Kde selže předchozí důkaz?

(3) Navrhněte $O(\sqrt{n})$ -aproximační algoritmus pro barvení 3-obarvitelných grafů. (Jinými slovy, je dána optimální hodnota, kterou aproximujeme. Ale stále není lehké najít dobré řešení, tj. obarvení.) Nejprve obarvěte vrcholy vysokého stupně a jejich okolí.

Pro zbývající úlohy definujeme problém půjčování auta. Parametry jsou A a B , cena půjčení a koupě auta. Pokaždé, když pojedete na výlet, musíte se rozhodnout, zda auto půjčit nebo koupit. Dopředu nevíte, kolikrát pojedete, dokonce ani v daný den nevíte, zda pojedete naposledy. Optimální cena při n dnech je tedy $\min\{nA, B\}$, online cena může být buď nA nebo $iA + B$ pokud dne $i + 1$ auto koupíte. Kompetitivní poměr nesmí záviset na A a B . (Ekvivalentně můžete normalizovat na $A = 1$ s tím, že v definici kompetitivního poměru nepovolíte aditivní konstantu.)

(4) Najděte optimální deterministický algoritmus.

(4*) Najděte lepší pravděpodobnostní algoritmus. Nejlépe optimální algoritmus a dokažte to o něm.