

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

4A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 23.6.2025

Na případné dodatečné papíry napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.)

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky bude ve středu nebo čtvrtek (bude vypsáno v SISu).

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

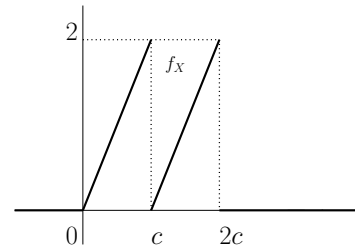
x	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.006	0.023	0.067	0.159	0.309	0.5	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994
$\Psi_1(x)$	0.121	0.148	0.187	0.25	0.352	0.5	0.648	0.75	0.813	0.852	0.879
$\Psi_2(x)$	0.065	0.092	0.136	0.211	0.333	0.5	0.667	0.789	0.864	0.908	0.935
$\Psi_{49}(x)$	0.008	0.026	0.07	0.161	0.31	0.5	0.69	0.839	0.93	0.974	0.992
$\Psi_{50}(x)$	0.008	0.025	0.07	0.161	0.31	0.5	0.69	0.839	0.93	0.975	0.992
$\Psi_{51}(x)$	0.008	0.025	0.07	0.161	0.31	0.5	0.69	0.839	0.93	0.975	0.992

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.8856	2.92	4.3027	6.9646	9.9248
$\Psi_{35}^{-1}(p)$	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
$\Psi_{36}^{-1}(p)$	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
$\Psi_{37}^{-1}(p)$	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- (a) Jaká je hodnota c ?
- (b) Jaká je $P(X < 1/3)$?
- (c) Jaká je $P(X > 3/2)$?
- (d) Jaký je šedesátý percentil X ?
- (e) Spočtete $\mathbb{E}(X)$ a $\text{var}(X)$.



2. (10 bodů) (a) Prokop si nařídil budíka na 4 hodiny ráno. S pravděpodobností $p = 0.1$ vstane na první zazvonění. S pravděpodobností $1 - p$ budík zamáčkne a spí dalších 10 minut. Pak se situace opakuje, předpokládejme, že nezávisle na tom, kolikáté zvonění to je. Označme T dobu, kdy Prokop vstane. Určete $\mathbb{E}(T)$ a $P(T < 5)$ (tj. pravděpodobnost, že vstane dříve než v pět ráno).

(b) Nyní uvažujte variantu, kdy při každém zvonění s pravděpodobností $q = 0.05$ dříve než Prokop vstane jeho bratr a budík mu vyhodí z okna. Určete pravděpodobnost, že se tak stane. Také v této variantě určete pravděpodobnost, že Prokop vstane dříve než v 5 hodin. (Po vyhození budíku to už určitě nezvládne.)

3. (10 bodů) Při pádu z metrové výšky se mobil rozbije (bude mít viditelné poškození) s pravděpodobností p . Abychom p určili, opakovaně pouštíme mobil z dané výšky a měříme, při kolikátém pádu se rozbije. Tento pokus jsme zopakovali celkem pětkrát (tj. s pěti kusy stejného typu mobilu). Získali jsme tato data: 5, 4, 5, 6, 4.

(a) Odhadněte p pomocí momentové metody.

(b) Odhadněte p pomocí metody maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem rozptyl diskrétní náhodné veličiny.

Označme X náhodnou veličinu, pro kterou $p_X(0) = 0.5$, $p_X(2) = 0.2$, $p_X(-2) = 0.3$. Určete její rozptyl.

(b) Definujte pojem sdružená hustota náhodných veličin.

Uvažme hustotu danou předpisem $f_{X,Y}(x,y) = 2$ pro $0 \leq x \leq y \leq 1$ (a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ jinak). Určete marginální hustoty f_X , f_Y , pravděpodobnosti $P(X \geq 0.5)$, $P(Y \geq 0.5)$ a také $P(X \geq 0.5 \& Y \geq 0.5)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, co je cílem intervalového odhadu a jakým způsobem ho provádíme. Metodu ilustруйте na následujícím příkladu:

Výzkumnice chce odhadnout průměrný čas (v minutách), který lidé denně věnují cvičení. Pro náhodný výběr 36 dospělých zjistí, že jejich průměrný denní čas cvičení je 42 minut a směrodatná odchylka výběru je 12 minut.

(a) Sestrojte 95%-ní interval spolehlivosti pro skutečný průměrný denní čas cvičení v celé populaci.

(b) Vysvětlete význam tohoto intervalu – jaký význam má číslo 95 %?

(c) Představte si, že výzkumnice chce snížit šířku intervalu spolehlivosti na polovinu. Kolik osob by přibližně musela zařadit do nového výběru, pokud by směrodatná odchylka zůstala stejná?

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o celkové střední hodnotě (o rozboru případů). Věty, které případně použijte, nemusíte dokazovat, ale uveďte jejich znění a vysvětlete, kde se použijí. Definujte použité pojmy. Můžete předpokládat, že zkoumáte diskrétní náhodnou veličinu.

