

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

3B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 16.6.2025

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe v pátek dopoledne.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98

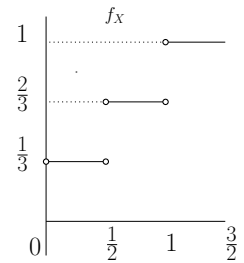
p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\chi_5^2(x)$	0.151	0.3	0.451	0.584	0.694	0.779	0.844	0.891	0.925	0.949	0.965	0.977
$\chi_6^2(x)$	0.08	0.191	0.323	0.456	0.577	0.679	0.762	0.826	0.875	0.912	0.938	0.957
$\chi_9^2(x)$	0.009	0.036	0.089	0.166	0.26	0.363	0.466	0.563	0.65	0.724	0.787	0.837
$\chi_{10}^2(x)$	0.004	0.019	0.053	0.109	0.185	0.275	0.371	0.468	0.56	0.642	0.715	0.776

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslena hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- (a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
- (b) Jedná se o diskrétní nebo o spojitou náhodnou veličinu?
- (c) Spočtěte $P(X < 1)$.
- (d) Jaká je $P(X \geq 1/2)$?
- (e) Jaký je medián X ?
- (f) Jaký je osmdesátý percentil X ?
- (g) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Opakovaně házíme běžnou kostkou. Skončíme, když nám dvakrát po sobě padne jednička.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že skončíme po čtvrtém hodu?

(b) Jaká je střední doba počtu hodů?

(c) Ve zrychlené verzi skončíme i tehdy, když dvakrát padne šestka. Jaká nyní střední doba počtu hodů?

3. (10 bodů) Máme krabici jablek jejichž hmotnost je náhodná veličina se střední hodnotou $100g$ a směrodatnou odchylkou $5g$. Vybereme z krabice náhodně n jablek, změříme jejich celkovou váhu S_n a průměrnou váhu označíme $\bar{X}_n$.

(a) Odhadněte

$$P(S_{50} \geq 5100).$$

(b) Pro jaké (co nejmenší) n bude platit

$$P(|\bar{X}_n - 100| \geq 2) \leq 0.1?$$

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem distribuční funkce a kvantilová funkce náhodné veličiny.

Určete medián a sedmý percentil veličiny $N(5, 9)$ – napište přesný vzorec a numericky odhadněte pomocí tabulek na první straně.

(b) Definujte pojem podmíněná střední hodnota diskrétní náhodné veličiny.

Nechť X_1, X_2 jsou výsledky dvou hodů běžnou hrací kostkou (tedy čísla $1, \dots, 6$), označme $X = X_1 X_2$. Spočtěte $\mathbb{E}(X_1 \mid X = 6)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, co testuje a jak se provádí test dobré shody.

Ilustrujte na následujícím příkladu: házíme hrací kostkou a jednotlivá čísla nám padla celkem v těchto počtech: 120, 80, 95, 110, 105, 90. (Tj. jednička byla 120-krát, dvojka 80-krát, atd.)

Formulujte, co je nulová hypotéza a vysvětlete, jak podle zadaných čísel rozhodnete, co kam dosadíte. Použijte tabulku na první straně pro odhad výsledku.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu „pravidlo naivního statistika“ (střední hodnota funkce náhodné veličiny). Můžete předpokládat, že jde o jednu diskrétní náhodnou veličinu.

