

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

3A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 16.6.2025

Na tento papír můžete napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe v pátek dopoledne.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98

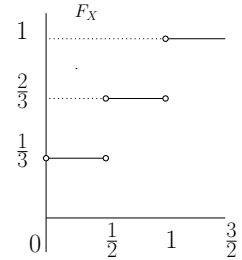
p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\chi_5^2(x)$	0.151	0.3	0.451	0.584	0.694	0.779	0.844	0.891	0.925	0.949	0.965	0.977
$\chi_6^2(x)$	0.08	0.191	0.323	0.456	0.577	0.679	0.762	0.826	0.875	0.912	0.938	0.957
$\chi_9^2(x)$	0.009	0.036	0.089	0.166	0.26	0.363	0.466	0.563	0.65	0.724	0.787	0.837
$\chi_{10}^2(x)$	0.004	0.019	0.053	0.109	0.185	0.275	0.371	0.468	0.56	0.642	0.715	0.776

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslena distribuční funkce náhodné veličiny X . Je dáno, že $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$. Některé hodnoty F_X nejsou vyznačeny.

- (a) Určete $F_X(1/2)$.
- (b) Jedná se o diskrétní nebo o spojitou náhodnou veličinu?
- (c) Spočtěte $P(X < 1)$.
- (d) Jaká je $P(X \geq 1/2)$?
- (e) Jaký je medián X ?
- (f) Jaký je osmdesátý percentil X ?
- (g) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Opakovaně házíme běžnou kostkou. Skončíme, když nám dvakrát po sobě padne dvojka.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že počet hodů bude nejvýše 3?
- (b) Jaká je střední doba počtu hodů?
- (c) Ve zrychlené verzi skončíme i tehdy, když jednou padne jednička. Jaká nyní střední doba počtu hodů?

3. (10 bodů) Máme krabici rezistorů jejichž odpor je náhodná veličina se střední hodnotou 100Ω a směrodatnou odchylkou 5Ω . Vybereme z krabice náhodně n rezistorů, změříme jejich celkový odpor S_n (součet odporů jednotlivých součástek) a průměrný odpor označíme $\bar{X}_n$.

(a) Použijte Centrální limitní větu pro odhad

$$P(98 \leq \bar{X}_{25} \leq 101).$$

(b) Pro jaké (co nejmenší) n bude platit

$$P(|\bar{X}_n - 100| \geq 1) \leq 0.05?$$

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustota náhodné veličiny.

Rozhodněte, zda nějaká náhodná veličina X má hustotu danou předpisem $f(x) = c(1-x)$ pro $x \in (0, 1)$ (a $f(x) = 0$ jinak) pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Pokud ano, určete c , $\mathbb{E}(X)$, $\text{var}(X)$ a medián X .

(b) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte formulaci pomocí distribuční funkce i pomocí hustoty.

Nechť $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ jsou dvě nezávislé náhodné veličiny. Označme $Y = \min(X_1, X_2)$. Najděte $P(Y \geq 3)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, co testuje a jak se provádí test dobré shody.

Ilustrujte na následujícím příkladu: testujeme náhodný generátor čísel od 0 do 9, při tisíci pokusech jsme jednotlivá čísla dostali v následujících počtech: 102, 98, 95, 101, 89, 110, 107, 96, 100, 102. (Tj. nula byla 102-krát, jednička 98-krát, atd.) Formulujte, co je nulová hypotéza a vysvětlete, jak podle zadaných čísel rozhodnete, co kam dosadíte. Použijte tabulku na první straně pro odhad výsledku.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o úplné střední hodnotě (o rozboru případů). Definujte použité pojmy. Můžete předpokládat, že jde o diskrétní náhodnou veličinu.

