

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |

## 2B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 12.6.2025

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe ve čtvrtek odpoledne.

---

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

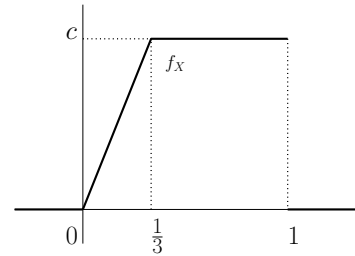
|             |      |      |      |      |     |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| $x$         | -2.0 | -1.5 | -1.0 | -0.5 | 0.0 | 0.5  | 1.0  | 1.5  | 2.0  |
| $\Phi(x)$   | 0.02 | 0.07 | 0.16 | 0.31 | 0.5 | 0.69 | 0.84 | 0.93 | 0.98 |
| $\Psi_1(x)$ | 0.15 | 0.19 | 0.25 | 0.35 | 0.5 | 0.65 | 0.75 | 0.81 | 0.85 |
| $\Psi_2(x)$ | 0.09 | 0.14 | 0.21 | 0.33 | 0.5 | 0.67 | 0.79 | 0.86 | 0.91 |
| $\Psi_9(x)$ | 0.04 | 0.08 | 0.17 | 0.31 | 0.5 | 0.69 | 0.83 | 0.92 | 0.96 |

|                     |        |        |         |         |         |
|---------------------|--------|--------|---------|---------|---------|
| $p$                 | 0.9    | 0.95   | 0.975   | 0.99    | 0.995   |
| $\Phi^{-1}(p)$      | 1.2816 | 1.6449 | 1.96    | 2.3263  | 2.5758  |
| $\Psi_1^{-1}(p)$    | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 |
| $\Psi_2^{-1}(p)$    | 1.8856 | 2.92   | 4.3027  | 6.9646  | 9.9248  |
| $\Psi_{59}^{-1}(p)$ | 1.2961 | 1.6711 | 2.001   | 2.3912  | 2.6618  |
| $\Psi_{60}^{-1}(p)$ | 1.2958 | 1.6706 | 2.0003  | 2.3901  | 2.6603  |
| $\Psi_{61}^{-1}(p)$ | 1.2956 | 1.6702 | 1.9996  | 2.389   | 2.6589  |

**Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!**

**1.** (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny  $X$ . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- (a) Jaká je hodnota  $c$ ?
- (b) Jaká je  $P(X < 1/4)$ ?
- (c) Jaká je  $P(X > 2/3)$ ?
- (d) Jaký je sedmdesátý percentil  $X$ ?
- (e) Spočtete  $\mathbb{E}(X)$ .





**2.** (10 bodů) Uvažme následující zjednodušený model trestního střelení v hokeji: V jednom kole se hráč týmu A pokusí dát gól (uspěje s pravděpodobností  $p = 0.3$ ), pak se o totéž pokusí hráč týmu B (uspěje s pravděpodobností  $q = 0.6$ ). Pokud oba dají, nebo oba nedají gól, pokračuje se dále. Jinak vyhraje ten tým, jehož hráč dal gól.

(a) Označme  $K$  počet kol, které se odehrají. Určete  $\mathbb{E}(K)$ .

(b) Určete  $\text{var}(K)$ .

(c) Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje tým A?

**3.** (10 bodů) O naměřených hodnotách 7, 5, 10, 8, 10 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení  $Pois(\lambda)$ . (Jedná se o počet dotazů na webový server během jedné minuty.)

- (a) Navrhněte bodový odhad parametru  $\lambda$  momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad parametru  $\lambda$  metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem kovariance náhodných veličin.

Označme  $X$  výsledek hodu šestistěnnou hrací kostkou,  $M$  zbytek po dělení  $X$  dvěma (tj.  $M$  nabývá hodnot 0, 1) a  $N$  zbytek po dělení  $X$  třemi. Určete kovarianci  $M$  a  $N$ . Jsou veličiny  $M$ ,  $N$  nezávislé?

(b) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte formulaci pomocí distribuční funkce i pomocí hustoty.

Rozhodněte, zda existují nezávislé  $X$ ,  $Y$  takové, že  $X \sim N(1, 1)$  a  $Y \sim N(0, 2)$ . Pokud ano, jakých hodnot může nabývat  $\mathbb{E}(X \cdot Y)$  a  $\mathbb{E}((2X + Y)^2)$ .

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu.

Vysvětlete, k čemu se tato věta hodí. Jednak obecně, pak konkrétně odhadněte pomocí této věty pravděpodobnost, že z 900 hodů kostkou nám padne nejvýše 126 šestek. Napište přesnou formuli pomocí funkce  $\Phi$  a použijte tabulku na první straně pro odhad.



**6.** (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součtu diskrétních náhodných veličin.



