

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

2A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 12.6.2025

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe ve čtvrtek odpoledne.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

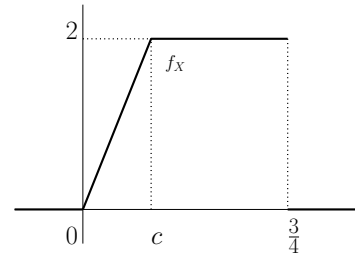
x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98
$\Psi_1(x)$	0.15	0.19	0.25	0.35	0.5	0.65	0.75	0.81	0.85
$\Psi_2(x)$	0.09	0.14	0.21	0.33	0.5	0.67	0.79	0.86	0.91
$\Psi_9(x)$	0.04	0.08	0.17	0.31	0.5	0.69	0.83	0.92	0.96

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.8856	2.92	4.3027	6.9646	9.9248
$\Psi_{59}^{-1}(p)$	1.2961	1.6711	2.001	2.3912	2.6618
$\Psi_{60}^{-1}(p)$	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
$\Psi_{61}^{-1}(p)$	1.2956	1.6702	1.9996	2.389	2.6589

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- (a) Jaká je hodnota c ?
- (b) Jaká je $P(X < 1/3)$?
- (c) Jaká je $P(X > 1/2)$?
- (d) Jaký je šedesátý percentil X ?
- (e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Uvažme následující zjednodušený model trestního střelení v hokeji: V jednom kole se hráč týmu A pokusí dát gól (uspěje s pravděpodobností $p = 0.4$), pak se o totéž pokusí hráč týmu B (uspěje s pravděpodobností $q = 0.5$). Pokud oba dají, nebo oba nedají gól, pokračuje se dále. Jinak vyhraje ten tým, jehož hráč dal gól.

(a) Označme K počet kol, které se odehrají. Určete $\mathbb{E}(K)$.

(b) Určete $\text{var}(K)$.

(c) Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje tým A?

3. (10 bodů) O naměřených hodnotách 1.5, 2, 2.8 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení $Exp(\lambda)$. (Jedná se o dobu, kterou webový server čeká na další dotaz.) Neboli $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

- (a) Navrhněte bodový odhad parametru λ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad parametru λ metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem kovariance náhodných veličin.

Označme X výsledek hodu šestistěnnou hrací kostkou a M zbytek po dělení X dvěma (tj. M nabývá hodnot 0, 1). Určete kovarianci X a M . Jsou veličiny X , M nezávislé?

(b) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.

Nechť $F = F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X , Y , daná vzorcem $F(x, y) = 1 - e^{-2x} - e^{-y} + e^{-2x-y}$ (pro $x, y \geq 0$). Jaká je pravděpodobnost, že $0 < X < 1$ a $1 < Y < 3$?

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu.

Vysvětlete, k čemu se tato věta hodí. Jednak obecně, pak konkrétně odhadněte pomocí této věty pravděpodobnost, že z 3600 hodů kostkou nám padne alespoň 624 šestek. Napište přesnou formuli pomocí funkce Φ a použijte tabulku na první straně pro odhad.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součinu nezávislých diskrétních náhodných veličin.

