

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

1. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 2.6.2025

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadáni rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe ve čtvrtek odpoledne.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98
$\Psi_1(x)$	0.15	0.19	0.25	0.35	0.5	0.65	0.75	0.81	0.85
$\Psi_2(x)$	0.09	0.14	0.21	0.33	0.5	0.67	0.79	0.86	0.91
$\Psi_9(x)$	0.04	0.08	0.17	0.31	0.5	0.69	0.83	0.92	0.96

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.8856	2.92	4.3027	6.9646	9.9248
$\Psi_{59}^{-1}(p)$	1.2961	1.6711	2.001	2.3912	2.6618
$\Psi_{60}^{-1}(p)$	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
$\Psi_{61}^{-1}(p)$	1.2956	1.6702	1.9996	2.389	2.6589

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

Dvojměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti jednotlivých hodnot dané tabulkou vpravo.

- (a) Vypočtete $P(X \geq Y)$.
- (b) Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y .
- (c) Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé?
- (d) Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
- (e) Určete $\mathbb{E}(XY)$.

$x \backslash y$	1	2	3
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

2. (10 bodů) Bezpečnostní kontrola na letišti kontroluje 200 cestujících. U každého z nich s pravděpodobností $p = 0.05$ bude třeba důkladnější (a časově náročná) kontrola. Označme počet důkladně kontrolovaných cestujících jako X .

- (a) Jaký je dobrý model pro X ? Jaká je střední hodnota a rozptyl X ?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že nebude kontrolován ani jeden cestující?
- (c) Jaká je pravděpodobnost, že bude kontrolovaných přesně osm? Uveďte též aproximaci pomocí Poissonova rozdělení.
- (d) Cestujete ve skupině deseti lidí. Jaká je pravděpodobnost, že budou kontrolovaných přesně osm cestujících, z nichž jeden je z vaší skupiny?

3. (10 bodů) Kurýr rozváží balíčky po Praze (rozváží je na kole, takže není ovlivněn dopravní situací a jednotlivé zásilky můžeme považovat za nezávislé). Doručení i -té zásilky mu bude trvat čas T_i . Podle zkušenosti je $\mathbb{E}(T_i) = 30$ minut a $\sigma_{T_i} = 6$ minut

(a) Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka času T na rozvoz 16 zásilek?

(b) Použijte Centrální limitní větu na odhad, jaká je pravděpodobnost, že to kurýr stihne za čas kratší než 7.5 hodin.

Napište přesnou formuli pomocí funkce Φ a použijte tabulku na předchozí straně pro odhad. Taky napište, jaké předpoklady na náhodné veličiny T_i používáme. Za jakého předpokladu na T_i platí uvedená formule pro pravděpodobnost přesně?

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustota náhodné veličiny, uveďte též jak souvisí s distribuční funkcí.

Uvažme náhodnou veličinu s hustotou $f_X(x) = \begin{cases} cx & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Pro jaké c se jedná o hustotu? Jaká je $P(X < 1/2)$? Jaká je $\mathbb{E}(X)$?

(b) Definujte pojem rozptyl diskrétní náhodné veličiny. Označme Y náhodnou veličinu, pro kterou $p_Y(0) = 0.5$, $p_Y(2) = 0.3$, $p_Y(-1) = 0.2$. Určete její rozptyl.

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. Objasněte mimo jiné tyto pojmy: chyba 1. a 2. druhu, hladina významnosti, síla testu, kritický obor, 1-výběrový, 2-výběrový a párový test.

Pojmy osvětlete na následujícím příkladu: IT analytik zkoumá, zda nové nastavení cache zlepšuje průměrnou dobu načítání jejich webové aplikace. Po naměření na 60 stránkách před a po implementaci nové cache se zjistilo, že průměrné zkrácení doby načítání je 0.6 sekundy se směrodatnou odchylkou 1.8 sekundy. Uveďte, podle jakého vzorce se rozhodnete (nemusíte vyčíslovat).

6. (10 bodů) Vyslovte větu – slabý zákon velkých čísel. Dokažte ji.