

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

6B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 17.9.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.) **Během celé písemky musí být mobily uloženy v zavřeném zavazadle.**

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky.

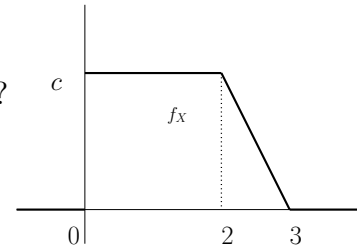
Možná se vám bude hodit následující tabulka.

x	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.01	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98	0.99
$\Psi_1(x)$	0.121	0.148	0.187	0.25	0.352	0.5	0.648	0.75	0.813	0.852	0.879
$\Psi_2(x)$	0.065	0.092	0.136	0.211	0.333	0.5	0.667	0.789	0.864	0.908	0.935
$\Psi_9(x)$	0.017	0.038	0.084	0.172	0.315	0.5	0.685	0.828	0.916	0.962	0.983

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslena hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- Najděte c , pro které se jedná o hustotu.
- Jedná se o diskrétní nebo o spojitou náhodnou veličinu?
- Spočtěte $P(X < 1/2)$.
- Jaký je medián X ?
- Jaký je devadesátý percentil X ?
- Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Každý paket přenášený místní wifi má pravděpodobnost $p = 0.03$, že kvůli interferenci a silným zdem dorazí porušený.

- Jaká je pravd., že z 200 odeslaných paketů dorazí všechny bez porušení?
- Jaká je pravd., že z 200 paketů jich bude právě 6 porušených?
- Odpověď na obě předchozí otázky aproximujte pomocí Poissonova rozdělení.

3. (10 bodů) Při pádu z metrové výšky se mobil rozbije (bude mít viditelné poškození) s pravděpodobností p . Abychom p určili, opakovaně pouštíme mobil z dané výšky a měříme, při kolikátém pádu se rozbije. Tento pokus jsme zopakovali celkem pětkrát (tj. s pěti kusy stejného typu mobilu). Získali jsme tato data: 5, 4, 5, 6, 6.

- Odhadněte p pomocí momentové metody.
- Odhadněte p pomocí metody maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružené distribuční funkce náhodných veličin.

Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny se sdruženou pravděpodobnostní funkcí danou vztahem:

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{c}{2^{x+y}}, & x, y = 1, 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Najděte c , pro kterou se jedná o sdruženou pravděpodobnostní funkci. Vypočítejte marginální pravděpodobnosti a rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

(b) Definujte pojem korelace náhodných veličin.

Spočtěte korelaci pro diskrétní náhodné veličiny určené následující tabulkou:

	y	1	3
x		1	3
2		0.3	0.2
4		0.1	0.4

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.

Mj. pomocí této věty odhadněte pravděpodobnost, že ze 180 hodů kostkou nám padne nejvýše 25 šestek.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o konvolučním vzorci pro diskrétní náhodné veličiny (tj. jaká je pravděpodobnostní funkce součtu).