

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

6A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 17.9.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.) **Během celé písemky musí být mobily uloženy v zavřeném zavazadle.**

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky.

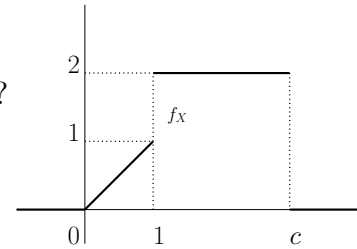
Možná se vám bude hodit následující tabulka.

x	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.01	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98	0.99
$\Psi_1(x)$	0.121	0.148	0.187	0.25	0.352	0.5	0.648	0.75	0.813	0.852	0.879
$\Psi_2(x)$	0.065	0.092	0.136	0.211	0.333	0.5	0.667	0.789	0.864	0.908	0.935
$\Psi_9(x)$	0.017	0.038	0.084	0.172	0.315	0.5	0.685	0.828	0.916	0.962	0.983

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslena hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- Najděte c , pro které se jedná o hustotu.
- Jedná se o diskrétní nebo o spojitou náhodnou veličinu?
- Spočtěte $P(X < 1/2)$.
- Jaký je medián X ?
- Jaký je osmdesátý percentil X ?
- Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Každý paket přenášený místní wifi má pravděpodobnost $p = 0.98$, že dorazí bez poruchy.

- Kolikátý v pořadí bude první porušený paket? (Zajímá nás střední hodnota této náhodné veličiny.)
- Kolikátý v pořadí bude desátý porušený paket? (Opět ve střední hodnotě.)
- Jaká je pravděpodobnost, že první porušený paket bude desátý v pořadí?

3. (10 bodů) Měříme rychlost stahování souborů z cloudového úložiště. Každý čas stahování jednoho souboru je náhodná veličina s průměrem $\mu = 5$ minut a standardní odchylkou $\sigma = 2$ minuty. Předpokládejme, že časy stahování jednotlivých souborů jsou na sobě nezávislé, stahování probíhá jedno po druhém (tj. vždy se stahuje jen jeden soubor, hned po jeho dokončení začneme stahovat další).

- Pokud stáhneme 50 souborů, jaká je přibližná pravděpodobnost, že celková doba stahování přesáhne 270 minut?
- Jaká je přibližná pravděpodobnost, že průměrná doba stahování na soubor je kratší než 4,5 minuty?

Použijte Centrální limitní větu. Napište přesnou formuli pomocí funkce Φ a použijte tabulku na předchozí straně pro odhad.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustota náhodné veličiny.

Určete c , pro které je funkce $f(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ hustota nějaké náhodné veličiny X . Určete příslušnou distribuční funkci a také $P(1 < X < 2)$.

(b) Definujte pojem podmíněná střední hodnota (jen podmiňování jevem).

Buď D výsledek hodu dvanáctistěnnou kostkou (čísla od 1 do 12). Buď T jev „ D je dělitelné třemi“. Spočtěte $\mathbb{E}(D | T)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se generují náhodné veličiny. Stručně uveďte přehled všech metod, které jsme probírali. Podrobně vysvětlete, jak funguje generování pomocí inverzní transformace a jak ho použít na generování „trojúhelníkového rozdělení“ (hustota $f(x) = x/2$ pro $x \in [0, 2]$, a $f(x) = 0$ jinak).

6. (10 bodů) Vyslovte větu o celkové střední hodnotě. Dokažte ji.