

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

4B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 18.6.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe v pátek dopoledne.

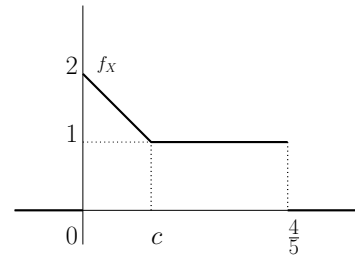
Možná se vám bude hodit následující tabulka distribučních funkcí.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98
$\Psi_1(x)$	0.15	0.19	0.25	0.35	0.5	0.65	0.75	0.81	0.85
$\Psi_2(x)$	0.09	0.14	0.21	0.33	0.5	0.67	0.79	0.86	0.91
$\Psi_9(x)$	0.04	0.08	0.17	0.31	0.5	0.69	0.83	0.92	0.96

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny X . Mimo vyznačený interval je tato funkce nulová.

- (a) Jaká je hodnota c ?
- (b) Jaká je $P(X < 1/3)$?
- (c) Jaká je $P(X > 1/2)$?
- (d) Jaký je osmdesátý percentil X ?
- (e) Spočtete $\mathbb{E}(X)$.



2. (10 bodů) Během bouřky budeme modelovat T – dobu čekání na nejbližší zablýsknutí – pomocí exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 2 minuty.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že na příští blesk budeme čekat více než 1 minutu?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že doba čekání bude mezi 19 a 20 sekundami?
- (c) Čas měříme na stopkách, které ukazují jen sekundy (tj. mezi 19 a 20 sekundami budou ukazovat 20 sekund), neboli S je T zaokrouhleno na sekundy nahoru. Jaké je rozdělení S ? Jaká je střední hodnota S ?

3. (10 bodů) 3 milióny voličů vybírají z několika stran do Evropského parlamentu. V našem (velmi nedokonalém) volebním modelu budeme předpokládat, že 2 milióny voličů je rozhodnutých dopředu, zatímco milión je nerozhodnutý a bude volit náhodně.

Strana S dostane 200 tisíc hlasů od rozhodnutých voličů. Nerozhodnutí voliči ji budou volit s pravděpodobností 20 %.

- (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu hlasů pro stranu S ?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že S získá alespoň 400 600 hlasů? Vyjádřete přesně pomocí distribuční funkce vhodného binomického rozdělení.
- (c) Odpověď na předchozí část aproximujte pomocí centrální limitní věty.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (diskrétní případ, dvě veličiny).

Nechť A, B jsou dva nezávislé hody běžnou hrací kostkou, M je menší z nich. Jaká je pravděpodobnostní funkce p_M ?

- (b) Definujte pojem střední hodnoty spojité náhodné veličiny.

Pro náhodnou veličinu $X \sim U(0, 1)$ určete $E((X + 3)(X + 2))$.

5. (10 bodů) Vysvětlete jak se generují náhodné veličiny. Zejména vysvětlete, jak funguje zamítací generování (rejection sampling) a jak ho použít na generování rozdělení s hustotou $f_X(x) = 1 - |x|$ (pro $|x| < 1$, $f_X(x) = 0$ jinak).

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o linearitě střední hodnoty (pro diskrétní náhodné veličiny).