

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

### 3A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 6.6.2022

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra odpoledne.

---

---

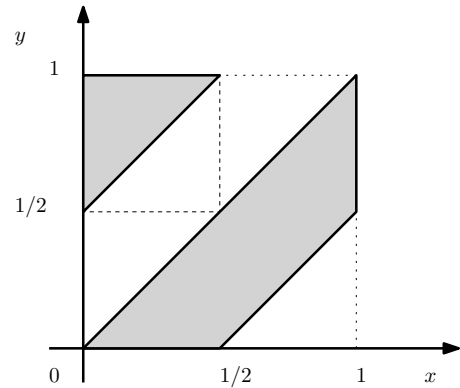
Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>
$\Phi^{-1}(t)$	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348
$\Psi_2^{-1}(t)$	1.885618	2.919986	4.302653	6.964557
$\Psi_3^{-1}(t)$	1.637744	2.353363	3.182446	4.540703
$\Psi_4^{-1}(t)$	1.533206	2.131847	2.776445	3.746947

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty!

1. (10 bodů) Sdružená hustota n.v.  $X, Y$  je rovna konstantě  $c$  pro šedou oblast na obrázku a nule jinde.

- Určete hodnotu  $c$ .
- Jaká je  $P(X < Y)$ ?
- Jaké je marginální rozdělení veličin  $X, Y$ ?
- Určete  $\mathbb{E}(X | Y = 1/4)$ .
- Určete  $f_{X|Y}(x|3/4)$ .
- Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?



2. (10 bodů) Do soutěže jasnovidců se přihlásilo 100 účastníků. Soutěž probíhá v kolech. V každém kole se každý účastník snaží uhodnout, jakou stranou dopadla hozená mince. Předpokládejme, že se mu to podaří s pravděpodobností  $2/3$ , nezávisle na ostatních účastnících a předchozích kolech. Pokud některý z jasnovidců v  $i$ -tém kole neuhodne správně, tak ze hry vypadává. Označme  $X$  počet účastníků, kteří úspěšně prošli prvními pěti koly.

- Jaká je střední hodnota  $X$ ?
- Jaká je pravděpodobnost jevu  $X = 2$ ? (Uveďte přesný vzorec i vhodnou aproximaci.)
- Označme  $Y$  počet kol, kterých se bude účastnit jasnovidce Jiří (včetně posledního, pro něj neúspěšného). Jaká je střední hodnota  $Y$ ? Jaká je pravděpodobnost, že  $Y > 10$ ?
- Označme  $Z$  pořadí kola, kdy poprvé někdo vypadne. Jaká je střední hodnota  $Z$ ?

3. (10 bodů) Opakovaným měřením hmotnosti jsme naměřili hodnoty 1.0, 0.9, 1.1. Naměřená data pocházejí z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Určete intervalový odhad pro  $\mu$  s hladinou věrohodnosti  $\alpha = 0.05$ , pokud

- Víme, že  $\sigma = 0.1$ .
- Hodnotu  $\sigma$  neznáme.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustota náhodné veličiny  $X$ .

Pro jaké  $c$  je funkce  $f(x) = c/x^3$  pro  $x > 0$  (a  $f(x) = 0$  jinak) hustota nějaké náhodné veličiny? Jaká je její střední hodnota?

(b) Definujte pojem korelace dvou náhodných veličin.

Jaká je korelace  $\rho(X, X)$  pro  $X \sim U(0, 1)$ ?

Jaká je korelace  $\rho(X, X^2)$  pro  $X \sim U(0, 1)$ ?

Jaká je korelace  $\rho(X, Y)$  pro  $X, Y \sim U(0, 1)$  n.n.v.?

5. (10 bodů) Vyslovte větu o univerzalitě uniformního rozdělení. Vysvětlete, k čemu se hodí.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součinu nezávislých náhodných veličin.