

12. cvičení z PSt — 9.–15.5.2024

- Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$.
 - Navrhňte bodový odhad p momentovou metodou.
 - Navrhňte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.
 - Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní. (Stačí experimentálně na počítači.)
- Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Označme $\vartheta = 1/\lambda$.
 - Navrhňte bodový odhad ϑ momentovou metodou.
 - Navrhňte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.
 - Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
 - Spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE).
- Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zajímá nás pravděpodobnost p , že $X > 1$ pro $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. (Připomeňme, že $p = e^{-\lambda \cdot 1}$.)
 - Navrhňte bodový odhad p (libovolnou metodou), případně několik odhadů.
 - Prozkoumejte jeho vlastnosti.

Intervalové odhady

- Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. (Tj. parametr $\vartheta = \mu$.)
 - Najděte intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %. (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x = 2.9$.)
 - Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ ? Pro konkrétnost: naměřili jsme $x_1, \dots, x_9 = 1.82, 1.00, 2.50, 3.00, 0.50, 2.97, 1.76, 1.35, 3.41$.
 - Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?
- Tentokrát vybíráme z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$: μ ani σ neznáme, parametr $\vartheta = (\mu, \sigma)$. Naměřili jsme hodnoty 8.47, 10.91, 10.87, 9.46, 10.40.
 - Spočítejte výběrový průměr a výběrový rozptyl.
 - Kdybychom věřili, že spočtený výběrový rozptyl je skutečná hodnota σ^2 , najděte intervalový odhad pro μ .
 - Najděte intervalový odhad pro μ použitím Studentova t -rozdělení.
- Počet emailů za den modelujeme pomocí Poissonova rozdělení $Pois(\lambda)$. První týden v květnu jsme dostali 34,35,29,31,30 emailů. Najděte pro λ intervalový odhad se spolehlivostí 95 %.

Použijte k tomu poslední metodu z přednášky – tu využívající Studentova rozdělení. (Poissonovo rozdělení sice není normální, ale pro dostatečně vysokou hodnotu λ je normálnímu dost podobné, metoda bude mít spolehlivost blízko 95 %.)

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_4^{-1}(p)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6
$\Psi_8^{-1}(p)$	1.4	1.86	2.31	2.9	3.36
$\Psi_{20}^{-1}(p)$	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
$\Psi_{30}^{-1}(p)$	1.31	1.7	2.04	2.46	2.75

K procvičení

- Na webu <https://www.randomservices.org/random/data/Michelson.html> je soupis naměřených hodnot rychlosti světla při slavném Michelsonovu experimentu z roku 1879. Najděte 95%-ní intervalový odhad. (Můžete předpokládat, že chyba měření je normálně rozdělená se střední hodnotou nula.)
- Nechť $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ popisuje dráhu, kterou uletí radioaktivní částice, než se rozpadne. Náš přístroj její rozpad (a polohu rozpadu, tj. hodnotu X) zachytí, ale jen pokud $1 \leq X \leq 2$. Formálně, budeme zkoumat náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim F_{X|B}$ pro jev $B = 1 \leq X \leq 2$.

- (a) Navrhňte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhňte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

9. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Pois(\lambda)$.

- (a) Navrhňte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhňte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).