

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

5A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 8.9.2025

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.)

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.) **Během celé písemky musí být mobily uloženy v zavřeném zavazadle.**

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

Dvojměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti jednotlivých hodnot dané tabulkou vpravo.

- (a) Vypočtete $P(X \geq Y)$.
- (b) Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y .
- (c) Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé?
- (d) Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
- (e) Určete $\mathbb{E}(XY)$.

$y \backslash x$	1	2	3
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

2. (10 bodů) Ve vlaku se pokoušíme používat web pomocí náladové wifi. Při pokusu o přečtení webové stránky uspějeme s pravděpodobností $p = 0.8$. Předpokládejme pro jednoduchost, že jednotlivé pokusy jsou nezávislé. Chceme celkem přečíst deset stránek (komiksů, které jsme přes prázdniny nestihli přečíst).

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že u všech deseti stránek uspějeme napoprvé?
- (b) Jaká je střední hodnota počtu pokusů, než načteme první komiks?
- (c) Jaká je střední hodnota celkového počtu pokusů, než přečteme všech deset komiksů?
- (d) Pokud některou z požadovaných deseti stránek nedostaneme ani na pátý pokus, vzdáme online zábavu a vytáhneme knížku. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane? (Nemusíte vyčíslovat, napište vzorec „pro kalkulačku“.)

3. (10 bodů) Měříme rychlost zálohování souborů na serveru s $n = 50$ uživateli. Zálohování jednoho uživatele trvá dobu, kterou popisuje náhodná veličina s průměrem $\mu = 15$ minut a standardní odchylkou $\sigma = 3.5$ minuty. Předpokládejme, že doby zálohování jednotlivých uživatelů jsou na sobě nezávislé. Zálohujeme vždy jen jednoho z nich.

(a) Jaká je přibližná pravděpodobnost, že celková doba zálohování přesáhne 800 minut?

(b) Jaká je přibližná pravděpodobnost, že průměrná doba zálohování na jednoho uživatele je delší než 15.5 minuty?

Použijte Centrální limitní větu. Napište přesnou formuli pomocí funkce Φ a použijte tabulku na první straně pro odhad.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem korelace náhodných veličin.

Uvažme náhodnou veličinu $X \sim U(0, 2)$ a položme $Y = X^2$. Spočtete korelaci $\rho(X, Y)$. Jsou veličiny X, Y nezávislé?

(b) Definujte pojem rozptyl diskrétní náhodné veličiny.

Označme Z náhodnou veličinu, pro kterou $p_Z(0) = 0.4$, $p_Z(2) = 0.5$, $p_Z(-3) = 0.1$. Určete její rozptyl.

5. (10 bodů) Vysvětlete, co je cílem intervalového odhadu a jakým způsobem ho provádíme.

Metodu ilustrujte na následujícím příkladu: Chceme zjistit false-positive rate u našeho spamfiltru, neboli pravděpodobnost p , že žádoucí email označí za spam. Pečlivým zkoumáním zjistíme, že z 1000 emailů takto bylo označeno 15 emailů.

(a) Sestrojte 95%-ní interval spolehlivosti pro p .

(b) Vysvětlete význam tohoto intervalu – jaký význam má číslo 95 %?

(c) Představte si, že bychom chtěli snížit šířku intervalu spolehlivosti na polovinu. Kolik potřebujeme prozkoumat emailů?

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součinu nezávislých diskrétních náhodných veličin.