

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

5C. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 24.6.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.) **Během celé písemky musí být mobily uloženy v zavřeném zavazadle.**

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky.

Možná se vám budou hodit následující tabulky.

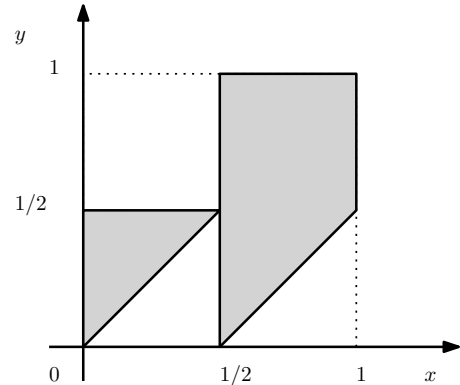
x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Phi(x)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.5	0.69	0.84	0.93	0.98
$\Psi_1(x)$	0.15	0.19	0.25	0.35	0.5	0.65	0.75	0.81	0.85
$\Psi_2(x)$	0.09	0.14	0.21	0.33	0.5	0.67	0.79	0.86	0.91
$\Psi_9(x)$	0.04	0.08	0.17	0.31	0.5	0.69	0.83	0.92	0.96

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.8856	2.92	4.3027	6.9646	9.9248
$\Psi_{59}^{-1}(p)$	1.2961	1.6711	2.001	2.3912	2.6618
$\Psi_{60}^{-1}(p)$	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
$\Psi_{61}^{-1}(p)$	1.2956	1.6702	1.9996	2.389	2.6589

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty! I správný výsledek bez zdůvodnění je téměř bezcenný.

1. (10 bodů) Sdružená hustota n.v. X, Y je rovna konstantě c pro šedou oblast na obrázku a nule jinde.

- Určete hodnotu c .
- Jaká je $P(X + Y < 1)$?
- Jaká je $P(X < Y)$?
- Jaké je marginální rozdělení veličin X, Y ? (Nakreslete jejich hustoty.)
- Určete $\mathbb{E}(Y \mid X = 3/4)$.
- Jsou X a Y nezávislé?



2. (10 bodů) Na zkoušku je přihlášeno 100 studentů. Každý z nich se s pravděpodobností 0.1 odhlásí. Každý, kdo zůstane přihlášen přijde s pravděpodobností 0.95. (Předpokládejme, že jednotliví studenti se rozhodují nezávisle.)

- Jaká je pravděpodobnost, že přijde všech 100 studentů?
- Jaká je střední hodnota počtu studentů, kteří přijdou na zkoušku?
- Jaká je pravděpodobnost, že přijdou všichni studenti, kteří zůstali přihlášení?

3. (10 bodů) Opakovaným měřením doby běhu programu jsme naměřili hodnoty 3.0, 3.5, 4.0 (vše v milisekundách). Naměřená data pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Určete intervalový odhad pro μ s hladinou věrohodnosti $\alpha = 0.05$, pokud

- víme, že $\sigma = 0.3$.
- hodnotu σ neznáme.

Nemusíte dopočítávat číselnou hodnotu – ale uveďte vzorec, který byste přímo mohli naťukat do kalkulačky, použijte tabulku na předchozí straně.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem distribuční funkce a kvantilová funkce náhodné veličiny. Určete medián a sedmý percentil veličiny $N(9, 4)$ – napište přesný vzorec a numericky odhadněte pomocí tabulek na první straně.

(b) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny).

Nechť $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ jsou dvě nezávislé náhodné veličiny. Označme $Y = \min(X_1, X_2)$. Najděte $P(Y \geq 2)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se generují náhodné veličiny. Zejména vysvětlete, jak funguje inverzní generování a jak ho použít na generování Paretova rozdělení (hustota $f(x) = \frac{3}{x^4}$ pro $x > 1$, a $f(x) = 0$ jinak).

6. (10 bodů) Vyslovte větu o rozptylu součtu náhodných veličin. Dokažte ji. Definujte použité pojmy.