

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

## 5B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 29.6.2022

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra odpoledne.

---

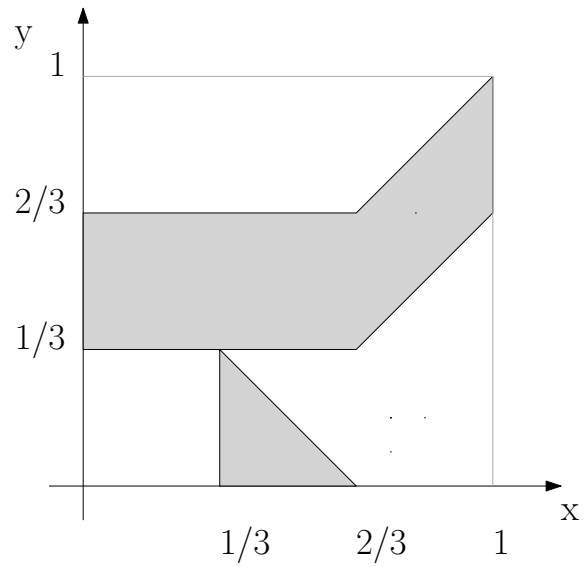
---

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Sdružená hustota n.v.  $X, Y$  je znázorněna na obrázku. Funkce je rovna konstantě  $c$  pro šedou oblast a nule jinde.

- Určete hodnotu  $c$ .
- Jaká je  $P(X < Y)$ ?
- Jaké je marginální rozdělení veličin  $X, Y$ ?

- Určete  $\mathbb{E}(X | Y = 1/2)$ .
- Určete  $f_{X|Y}(x|3/4)$ .
- Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?



2. (10 bodů)

Adam a Božena hrají následující hru: na začátku každého kola hodí šestistěnnou kostkou.

- Při výsledku 1–2 pak sehrají rychlou partii šachu. Božena vyhraje s pravděpodobností 0.3 a získá bod. Adam vyhraje s pravděpodobností 0.2 (a získá bod on). S pravděpodobností 0.5 je výsledkem remíza a každý získá půl bodu.
- Pokud na kostce padne 3–6, následuje jedno kolo boxerského zápasu. V něm Adam vyhraje s pravděpodobností 0.8, Božena s pravděpodobností 0.2, remízu neuvažujeme.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Adam získá v jednom kole? A kolik je to pro Boženu?

(b) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které jednotliví hráči získají po deseti kolech? (Body se sčítají.)

(c) U každého boxerského zápasu je pravděpodobnost 0.2, že jeden z hráčů bude vyřazen KO a do dalších kol už nenastupuje. Adam s Boženou se dohodli, že budou hrát tak dlouho, dokud jeden z nich nebude takto vyřazen. Jaká je střední hodnota počtu kol, které celkem sehrají? Kolik z toho bude (ve střední hodnotě) šachových partií?

3. (10 bodů)

Předpokládejme, že doba do příchodu dalšího emailu je dobře popsána exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ .

(a) Vytvořte bodový odhad střední doby čekání na nový email. Použijte momentovou metodu i metodu max. věrohodnosti.

(b) Vytvořte pro střední dobu čekání na nový email intervalový odhad se spolehlivostí 0.9.

(c) Za 8 hodin dostaneme 20 emailů. Vyčíslete odhady z předchozích částí.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.

Nechť  $F = F_{X,Y}$  je sdružená distribuční funkce náhodných veličin  $X, Y$ . Nechť  $F(1, 1) = 0.8$ ,  $F(0, 1) = F(1, 0) = 0.4$ . Může být  $F(0, 0) = 0.1$ ? Jaká je nejmenší/největší možná hodnota  $F(0, 0)$ ?

(b) Popište, jak se spočítá empirická distribuční funkce.

Načrtněte empirickou distribuční funkci pro data 2, 7, 2, 4, 1, 4, 5.

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se provádí test dobré shody.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součtu náhodných veličin. (Můžete předpokládat, že jsou to veličiny diskrétní.)

Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>
$\Phi^{-1}(t)$	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348
$\Psi_2^{-1}(t)$	1.885618	2.919986	4.302653	6.964557
$\Psi_3^{-1}(t)$	1.637744	2.353363	3.182446	4.540703
$\Psi_4^{-1}(t)$	1.533206	2.131847	2.776445	3.746947