

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

3B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 12.6.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe v pátek dopoledne.

Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_9^{-1}(p)$	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
$\Psi_{10}^{-1}(p)$	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
$\Psi_{11}^{-1}(p)$	1.36	1.8	2.2	2.72	3.11
$\Psi_{12}^{-1}(p)$	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
$\Psi_{13}^{-1}(p)$	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

Dvojměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti jednotlivých hodnot dané tabulkou vpravo.

$y \backslash x$	1	2	3
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

- Vypočtěte $P(X \leq Y)$.
- Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y .
- Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé?
- Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
- Určete $\mathbb{E}(XY)$.
- Určete $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$.

2. (10 bodů)

Na Divokém západě probíhá pistolnický souboj mezi Rychlým Richardem a Přesným Paulem. Začíná Richard, má pravděpodobnost 0.6, že zasáhne Paula (a souboj skončí). Následuje výstřel Paula – ten má pravděpodobnost 0.75, že zasáhne Richarda (a souboj skončí). Souboj pokračuje, dokud není někdo zasažen.

- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Paul?
- Jaká je střední hodnota počtu výstřelů, které v souboji celkem padnou?

3. (10 bodů) O naměřených hodnotách 0.5, 1.2, 1.8 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení $Exp(1/\theta)$. (Jedná se o dobu, kterou webový server čeká na další dotaz.) Neboli $P(T > t) = e^{-t/\theta}$.

- Navrhněte bodový odhad parametru θ momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad parametru θ metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustoty náhodné veličiny.

Rozhodněte, zda nějaká náhodná veličina X má hustotu danou předpisem $f(x) = c/x^4$ pro $x > 1$ (a $f(x) = 0$ jinak) pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Pokud ano, určete $\mathbb{E}(X)$ a $\text{var}(X)$.

(b) Definujte pojem podmíněná střední hodnota diskrétní náhodné veličiny.

Nechť X_1, X_2 jsou výsledky dvou hodů běžnou hrací kostkou (tedy čísla 1, ..., 6), označme $X = X_1 X_2$. Spočtěte $\mathbb{E}(X | X_2 \text{ je sudé})$.

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. Objasněte mimo jiné tyto pojmy: chyba 1. a 2. druhu, hladina významnosti, síla testu, kritický obor, 1-výběrový, 2-výběrový a párový test.

Pojmy osvětlete na následujícím příkladu: Společnost chce zjistit, zda nový model strojového učení zvyšuje přesnost předpovědí ve srovnání se stávajícím modelem. Datový vědec otestuje oba modely na validační sadě 12 datasetů. Nový model vykazuje průměrné zvýšení přesnosti o 3 % se směrodatnou odchylkou 1.5 %. V případě potřeby použijte tabulku na předchozí straně.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě funkce náhodné veličiny „pravidlo naivního statistika“. Můžete předpokládat, že jde o diskrétní náhodnou veličinu.