

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

3A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 12.6.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) **Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).**

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena (emailem) známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe v pátek dopoledne.

Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_9^{-1}(p)$	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
$\Psi_{10}^{-1}(p)$	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
$\Psi_{11}^{-1}(p)$	1.36	1.8	2.2	2.72	3.11
$\Psi_{12}^{-1}(p)$	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
$\Psi_{13}^{-1}(p)$	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

Dvojměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti jednotlivých hodnot dané tabulkou vpravo.

$y \backslash x$			
	1	2	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

- Vypočtěte $P(X < Y)$.
- Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y .
- Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé?
- Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
- Určete $\mathbb{E}(XY)$.
- Určete $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$.

2. (10 bodů)

Na Divokém západě probíhá pistolnický souboj mezi Rychlým Richardem a Přesným Paulem. Začíná Richard, má pravděpodobnost 0.5, že zasáhne Paula (a souboj skončí). Následuje výstřel Paula – ten má pravděpodobnost 0.8, že zasáhne Richarda (a souboj skončí). Souboj pokračuje, dokud není někdo zasažen.

- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Richard?
- Jaká je střední hodnota počtu výstřelů, které Richard vystřelí?

3. (10 bodů) O naměřených hodnotách 1.5, 2, 2.8 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení $Exp(\lambda)$. (Jedná se o dobu, kterou webový server čeká na další dotaz.) Neboli $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

- Navrhněte bodový odhad parametru λ momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad parametru λ metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem hustoty náhodné veličiny.

Rozhodněte, zda nějaká náhodná veličina X má hustotu danou předpisem $f(x) = c/x^3$ pro $x > 1$ (a $f(x) = 0$ jinak) pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Pokud ano, určete $\mathbb{E}(X)$ a $\text{var}(X)$.

(b) Definujte pojem podmíněná střední hodnota diskretní náhodné veličiny.

Nechť X_1, X_2 jsou výsledky dvou hodů běžnou hrací kostkou (tedy čísla 1, ..., 6), označme $X = X_1 X_2$. Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid X_2 > 3)$.

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. Objasněte mimo jiné tyto pojmy: chyba 1. a 2. druhu, hladina významnosti, síla testu, kritický obor, 1-výběrový, 2-výběrový a párový test.

Pojmy osvětlete na následujícím příkladu: Softwarový inženýr chce otestovat, zda nový algoritmus zvýší efektivitu třídění ve srovnání se stávajícím algoritmem. Shromáždí vzorek 10 datových sad a zaznamená průměrnou dobu běhu třídění každé datové sady pomocí obou algoritmů. Zjistí, že průměrné zkrácení doby běhu je 2.5 ms se směrodatnou odchylkou 1 ms. V případě potřeby použijte tabulku na předchozí straně.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o úplné střední hodnotě (o rozboru případů). Definujte použité pojmy.