

Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

2B. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 4.6.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe ve čtvrtek odpoledne.

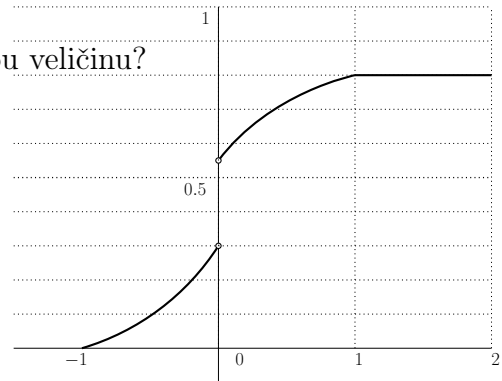
Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_3^{-1}(p)$	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
$\Psi_4^{-1}(p)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená distribuční funkce náhodné veličiny X . Hodnota $F_X(0)$ není na obrázku vyznačena.

- Určete $F_X(0)$.
- Co můžete říct o hodnotě $F_X(3)$?
- Jedná se o diskrétní nebo o spojitou náhodnou veličinu?
- Spočtěte $P(X < 1)$.
- Spočtěte $P(X > 0)$.
- Spočtěte $P(0 \leq X \leq 1)$.
- Určete osmdesátý percentil.



2. (10 bodů)

Házíme hrací kostkou, zapisujeme si jestli padlo sudé (S) nebo liché (L) číslo.

(a) Označme X počet výskytů „LS“, tj. takových i , že v i -tém hození padlo liché a v $(i + 1)$ -ním hození sudé číslo. Celkový počet hození je 400. Určete $\mathbb{E}(X)$.

(b) Označme Y počet hození, než se dočkáme výskytu dvojice „LS“, tj. kolikátým hozením padlo sudé číslo předcházené lichým číslem (házíme tak dlouho, dokud se to nestane). Určete $\mathbb{E}(Y)$.

3. (10 bodů) O naměřených hodnotách 6, 6, 10, 8, 10 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení $Pois(\lambda)$. (Jedná se o počet dotazů na webový server během jedné minuty.)

- Navrhněte bodový odhad parametru λ momentovou metodou.
- Navrhněte bodový odhad parametru λ metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte formulaci pomocí distribuční funkce i pomocí hustoty.

Rozhodněte, zda existují nezávislé X, Y takové, že $X \sim N(0, 1)$ a $Y \sim N(0, 2)$. Pokud ano, jakých hodnot může nabývat $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ a $\mathbb{E}((X - 2Y)^2)$.

(b) Definujte pojem kovariance náhodných veličin.

Označme X výsledek hození šestistěnnou hrací kostkou a Y hodnotu $X/3$ zaokrouhlenou na celá čísla dolů. Určete kovarianci X a Y .

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí. Zejména vysvětlete, jak se používá pro intervalové odhady.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o konvolučním vzorci pro diskrétní náhodné veličiny (tj. jaká je pravděpodobnostní funkce součtu).