Jméno a příjmení:

Pseudonym:

1	2	3	4	5	6

1. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 28.5.2024

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stranu!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, … (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, …, 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe ve čtvrtek odpoledne.

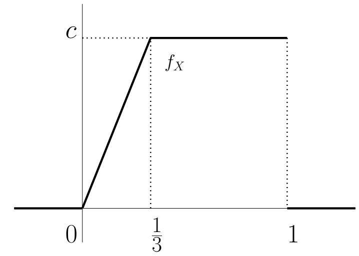
Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_3^{-1}(p)$	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
$\Psi_4^{-1}(p)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny X. Mimo interval $[0, 1]$ je tato funkce nulová.

(a) Jaká je hodnota c?
(b) Jaká je $P(X < 1/3)$?
(c) Jaká je $P(X > 2/3)$?
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.
(e) Jaký je třetí kvartil X?



2. (10 bodů) V hokejovém zápasu vstřelí tým A 40 střel na branku týmu B, každá má $p = 0.1$, že zasáhne. (Budeme předpokládat, že počet střel je předem daný a že střely jsou nezávislé. Realistický model hokeje by musel být komplikovanější.)

(a) Jaká je střední hodnota počtu gólů vstřelených týmem A? Jaký je rozptyl?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani jeden gól?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou přesně tři góly? Uveďte též aproximaci pomocí Poissonova rozdělení.

(d) Označme S pořadí střely, kterou tým A dá první gól. V této části úlohy předpokládejte, že se střílí libovolně dlouho, tj. S není omezeno číslem 40. Jaká je $P(S \leq 40)$? Jaká je $\mathbb{E}(S)$?

3. (10 bodů) Opakovaným měřením teploty jsme naměřili hodnoty 1.0, 0.8, 1.2. Naměřená data pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Určete intervalový odhad pro μ s hladinou věrohodnosti $\alpha = 0.05$, pokud

(a) víme, že $\sigma = 0.1$.

(b) hodnotu σ neznáme.

Nemusíte dopočítávat číselnou hodnotu – ale uveďte vzorec, který byste přímo mohli naťukat do kalkulačky, použijte tabulku na předchozí straně.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem rozptyl diskrétní náhodné veličiny. Označme X náhodnou veličinu, pro kterou $p_X(0) = 0.5$, $p_X(2) = 0.2$, $p_X(-1) = 0.3$. Určete její rozptyl.

(b) Definujte pojem sdružená distribuční funkce. Nechť $F = F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X, Y, daná vzorcem $F(x, y) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ (pro $x, y \geq 1$). Jaká je pravděpodobnost, že $1 < X < 2$ a $2 < Y < 3$?

5. (10 bodů) Vysvětlete, co testuje a jak se provádí test dobré shody.

Ilustrujte na následujícím příkladu: zkoušející očekává, že z písemky bude stejný počet známek 1, 2, 3, ale známku 4 dostane 10 % zkoušených. Přihlášených 50 studentů dostalo tyto známky: 17×1, 10×2, 18×3 a 5×4. Posuďte oprávněnost očekávání zkoušejícího. (Formulujte, co je nulová hypotéza a vysvětlete, jak podle zadaných čísel rozhodnete, co kam dosadíte. Nemusíte vyčíslovat ani odhadovat hodnoty kvantilových funkcí.)

6. (10 bodů) Vyslovte větu – slabý zákon velkých čísel. Dokažte ji.