5. cvičení z PSt — 18.–22.3.2024

Z každého z prvních třech oddílů vyřešte aspoň jeden příklad!

Základní zacházení s $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x),$$

1. (a) Nechť $P(X = 100) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$. Určete $\mathbb{E}(X)$. (Přímo nebo pomocí některé vlastnosti střední hodnoty.)

(b) Nechť $P(Y = 100) = p$, $P(Y = 99) = 1 - p$. Určete $\mathbb{E}(Y)$.

2. Předpokládejme, že vyřešení jednoho příkladu trvá X minut, kde $X = 1, 2, \dots,$ nebo 5. Doba trvání je náhodná (závislá na počasí) a pravděpodobnostní funkce je $p_X(1) = p_X(2) = 0.1$, $p_X(3) = p_X(4) = 0.2$, $p_X(5) = 0.4$. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

3. (a) Máme neomezený počet černých a červených ponožek. Ponožky vytahujeme poslepu, obě barvy jsou stejně pravděpodobné. Kolik ponožek vytáhneme, než budeme mít dvě stejné barvy?

(b) Řešte totéž pro tři různé barvy.

4. Nové kasino nabízí následující hru: vsadíme x korun, s pravděpodobností 1/2 o ně přijdeme, ale s pravděpodobností 1/2 vyhrajeme $2x$ (navíc k našim x korunám). (a) Začínáme s k korunami. Pokud chceme maximalizovat střední hodnotu našich zisků po n kolech, jak to udělat (a kolik ta střední hodnota je)?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že s takovou strategií přijdeme o všechny peníze?

(c) Jakou strategii byste zvolili?

Linearita $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \cdots + a_n \mathbb{E}(X_n)$$

5. Hodíme n-krát korunou, která má pravděpodobnost, že padne Panna, rovnou p.

(a) Označme X počet po sobě jdoucích hodů PO. (Např. pokud $n = 6$ a padlo postupně POOPOO, tak $X = 2$.) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(b) Rozmyslete si, proč se nejedná o binomické rozdělení.

(c) Označme teď Y počet opakování hodů POP, jaká je $\mathbb{E}(Y)$?

[**Nápověda:** použijte linearitu. Označme A_i jev, že i-tý hod byl P a $(i+1)$-ní hod O, dále buď $X_i = I_{A_i}$ příslušná indikátorová veličina.]

6. Hodíme $\binom{n}{2}$-krát korunou z minulého příkladu. Přitom tvoříme graf s vrcholy $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Postupně pro všechny dvojice $\{i, j\} \in \binom{V}{2}$ určíme, jestli jsou spojené hranou – to bude tehdy, když příslušným hodem padla Panna. Vzniklému grafu se říká náhodný graf $G(n, p)$.

(a) Ukažte, že střední hodnota počtu hran v grafu je $p\binom{n}{2}$. [**Nápověda:** Použijte linearitu jako v minulém případu nebo si všimněte, že počet hran se řídí binomickým rozdělením.]

(b) Ukažte, že střední hodnota počtu trojúhelníků v grafu je $p^3\binom{n}{3}$.

[**Nápověda:** Použijte linearitu: i-tý trojúhelník bude mít svoji proměnnou X_i.]

Podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x \mid B)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i P(B_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid B_i) \qquad B_1, B_2, \dots \text{ je rozklad } \Omega$$

7. V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností q jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

8. Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností p zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

9. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměna za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

(a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?

(b) Co když začne otázkou B?

(c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_A, p_B a odměny m_A, m_B, jak se má soutěžící rozhodnout? * A co když těch otázek bude víc než dvě?

Bonus

10. Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.

(a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?

(b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^{n}(1 - I_{A_i}).$$

(c) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty. Dostanete princip inkluze a exkluze, který znáte z diskrétní matematiky.

11. Ke každému nákupu dostaneme jako dárek autíčko – náhodně vybrané z n typů. Kolik průměrně musíme udělat nákupů, než dostaneme všechny typy autíček?

12. * Označme M počet emailů, které dostaneme za den, S počet spamů mezi nimi, H počet „hamů“ – těch, co nejsou spamy. Předpokládejme, že $M \sim Pois(\lambda)$ a že každý email má nezávisle na ostatních pravděpodobnost p, že je to spam.

(a) Vyjádřete $P(S = k)$ (jako nekonečnou sumu) pomocí sdruženého rozdělení M a S.

(b) Odvoďte, že $S \sim Pois(p\lambda)$.

(c) Odvoďte, že $H \sim Pois((1-p)\lambda)$ a také, že H, S jsou nezávislé n.v.

K procvičení

13. Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer.

(a) Určete $\mathbb{E}(S)$.

(b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

14. Házíme korunou s pravděpodobností, že padne Panna rovnou p. Když dva hody po sobě dopadnou stejně, tak skončíme. Jaký je střední počet hodů, které provedeme?