

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

#### 4A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 26.6.2023

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra odpoledne.

---

Možná se vám budou hodit následující tabulky

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\Phi(x)$	0.023	0.067	0.159	0.309	0.5	0.692	0.841	0.933	0.977

**0.9      0.95      0.975      0.99**

$\Phi^{-1}(t)$  1.281552 1.644854 1.959964 2.326348

$\Psi_2^{-1}(t)$  1.885618 2.919986 4.302653 6.964557

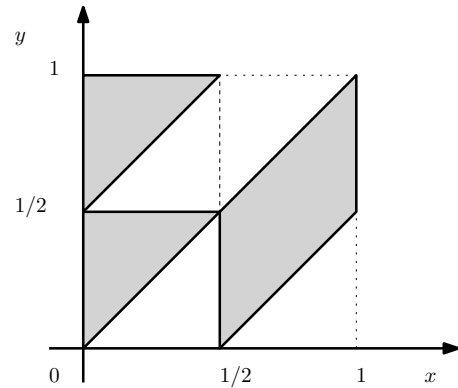
$\Psi_3^{-1}(t)$  1.637744 2.353363 3.182446 4.540703

$\Psi_4^{-1}(t)$  1.533206 2.131847 2.776445 3.746947

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty!

1. (10 bodů) Sdružená hustota n.v.  $X, Y$  je rovna konstantě  $c$  pro šedou oblast na obrázku a nule jinde.

- Určete hodnotu  $c$ .
- Jaká je  $P(X + Y < 1)$ ?
- Jaká je  $P(X < Y)$ ?
- Jaké je marginální rozdělení veličin  $X, Y$ ?
- Určete  $\mathbb{E}(Y \mid X = 1/4)$ .
- Určete  $f_{Y|X}(y|1/4)$ .
- Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?



2. (10 bodů) V parku běhají tři psi, Alex, Ben a Charlie. Jejich pán jim hází míček (jeden pro všechny tři dohromady). Míček chytí Alex s pravděpodobností 0.5, Ben s pravděpodobností 0.3 a Charlie 0.2. Celkem byl míček vyhozen stokrát (a pak stokrát chyčen jedním ze tří psů a zase vrácen pánovi). Označme  $A, B, C$  počet, kolikrát míček chytil Alex, Ben a Charlie.

- Určete  $\mathbb{E}(C)$  a  $P(C = 10)$ .
- Jsou veličiny  $A, B, C$  nezávislé?
- Určete  $P(A = 40 \& B = 40 \& C = 20)$ .
- Jaká je pravděpodobnost, že Charlie míček poprvé chytil při padesátém hození?

3. (10 bodů) Nechť  $X, Y \sim U(0, 1)$  a  $X, Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme  $A = \min(X, Y)$  a  $B = \max(X, Y)$ .

- Určete distribuční funkci  $B$ .
- Určete hustotu  $B$ .
- Vypočtěte  $\mathbb{E}(B)$ .
- Určete  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$  a  $\mathbb{E}(A)$ .
- Spočtěte  $\text{cov}(A, B)$ .

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte obě ekvivalentní formulace.

Rozhodněte, zda existují nezávislé  $X, Y$  takové, že  $X \sim N(0, 1)$  a  $Y \sim N(0, 2)$ . Pokud ano, jakých hodnot může nabývat  $\mathbb{E}(X \cdot Y)$  a  $\mathbb{E}(X \cdot Y^2)$ .

(b) Uvažme pravděpodobnostní prostor  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  a definujme náhodnou veličinu  $X$ , která na  $\Omega$  nabývá hodnot po řadě  $-1, 0, 1$  a  $Y$ , která nabývá hodnot  $0, 1, 0$ .

Určete korelaci  $X$  a  $Y$ . Rozhodněte, zda jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé.

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.

6. (10 bodů) Napište a dokažte vzorec pro pravděpodobnost obdélníka pomocí sdružené distribuční funkce.