

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

### 3A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 22.6.2023

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete kromě svého jména a příjmení rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejnou stránku. (Můžete na druhou stránku téhož listu.)

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra odpoledne.

---

Možná se vám budou hodit následující tabulky

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\Phi(x)$	0.023	0.067	0.159	0.309	0.5	0.692	0.841	0.933	0.977

**0.9    0.95    0.975    0.99**

$\Phi^{-1}(t)$  1.281552 1.644854 1.959964 2.326348

$\Psi_2^{-1}(t)$  1.885618 2.919986 4.302653 6.964557

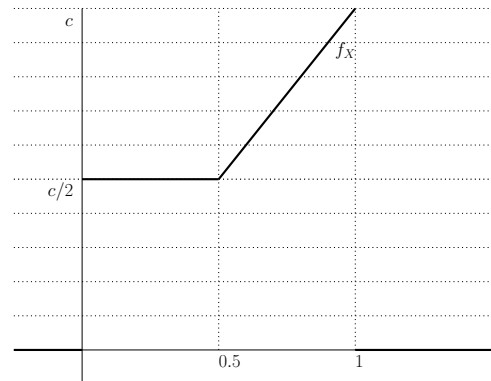
$\Psi_3^{-1}(t)$  1.637744 2.353363 3.182446 4.540703

$\Psi_4^{-1}(t)$  1.533206 2.131847 2.776445 3.746947

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená hustota náhodné veličiny  $X$ . Mimo interval  $[0, 1]$  je tato funkce nulová.

- Jaká je hodnota  $c$ ?
- Jaká je  $P(X < 1/2)$ ?
- Jaká je  $P(X > 1/2)$ ?
- Spočtěte  $P(1/3 < X < 2/3)$ .
- Spočtěte  $\mathbb{E}(X)$ .
- Jaký je desátý percentil  $X$ ?



2. (10 bodů) Na koncertě hudební školy hrají Adam, Božena a Cyril. Budeme sledovat, kolik udělají chyb. Pro zjednodušení předpokládáme, že každá chyba spočívá ve špatném zahrání jedné noty, a že jednotlivé chyby jsou nezávislé.

Adam dělá v každé notě chybu s pravděpodobností  $p_a = 1/100$ , Božena s pravděpodobností  $p_b = 1/200$ , a Cyril s  $p_c = 1/500$ . Adam hrál tři skladby, každou s 200 notami. Božena hrála čtyři skladby, každou se 150 notami. Cyril hrál jednu skladbu s 1000 not.

Označme  $A_1$  počet chyb v první Adamově skladbě, analogicky  $A_2, A_3, B_1, \dots, B_4$ . Dále buď  $A$  celkový počet Adamových chyb,  $B$  počet Boženiných a  $C$  Cyrilových chyb.

- Určete  $\mathbb{E}(A_1)$  a  $P(A_1 = 2)$ .
- Určete  $\mathbb{E}(B)$  a  $P(B = 1)$ .
- Spočtěte  $\mathbb{E}(A + B + C)$ . Aproximujte  $P(A + B + C = 10)$  pomocí Poissonova rozdělení.
- Jednotlivá vystoupení jsou v náhodném pořadí. Označme  $X$  počet chyb v první skladbě prvního žáka. Určete  $\mathbb{E}(X)$  a  $P(X = 2)$ .

3. (10 bodů) Ve volbách hlasuje jeden milión voličů pro dva kandidáty, A a B. Předpokládejme, že 2000 z nich určitě budou hlasovat pro A. Ostatní se rozhodnou náhodně – s pravděpodobností 0.5 pro A a 0.5 pro B. Předpokládejme dále, že všichni budou hlasovat, a že všechny hlasy budou platné.

- Vyjádřete pravděpodobnost, že A vyhraje, pomocí distribuční funkce vhodného rozdělení.
- Aproximujte tuto pravděpodobnost pomocí centrální limitní věty.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem podmíněná střední hodnota diskrétní náhodné veličiny.

Nechť  $X_1, X_2$  jsou výsledky dvou hodů běžnou hrací kostkou (tedy čísla  $1, \dots, 6$ ), označme  $X = X_1 \cdot X_2$ . Spočtěte  $\mathbb{E}(X \mid X_2 \text{ je sudé})$ .

- Definujte pojem kovariance náhodných veličin.

Označme  $X$  výsledek hodu šestistěnnou hrací kostkou a  $Y$  hodnotu  $X/2$  zaokrouhlenou na celá čísla nahoru. Určete kovarianci  $X$  a  $Y$ .

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. Objasněte mimo jiné, co je to chyba 1. a 2. druhu a jak můžeme zvýšit sílu testu.

6. (10 bodů) Vyslovte větu – slabý zákon velkých čísel. Dokažte ji.