3. cvičení z PSt — 28.2.2023

Nezávislé jevy

Připomenutí: Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ jsou *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.

1. Rozmyslete, zda je podmínku nezávislosti třeba ověřovat pro jednoprvkové množiny J.

2. Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c. A také jevy A^c, B^c.

3. (a) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
(b) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

4. Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které
(a) jsou nezávislé.
(b) nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
(c) jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Diskrétní náhodné veličiny

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *diskrétní náhodná veličina (discrete random variable)*, pokud $Im(X)$ (obor hodnot X) je spočetná množina a pokud pro všechna reálná x platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}.$$

5. Ověřte, že indikátorová náhodná veličina splňuje definici diskrétní náhodné veličiny.

6. Buď $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$. Definujme (a) $X(\omega) = \omega$,
(b) $Y(\omega) = 1$ (pro sudé ω) a $Y(\omega) = 0$ (jinak),
Rozhodněte, zda X, resp. Y, splňuje definici diskrétní náhodně veličiny.

Hrátky s náhodnými veličinami

7. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
(a) Jaká je $P(X > k)$? (Zkuste napřed pro $k = 1$, $k = 2$.)
(b) Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$ (a vzpomeňte si na jméno tohoto rozdělení).
(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

8. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

9. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z.

Bonus

10. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

11. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

12. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

13. Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

14. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E \mid A) = 0.7$ a $P(E \mid A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

15. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?