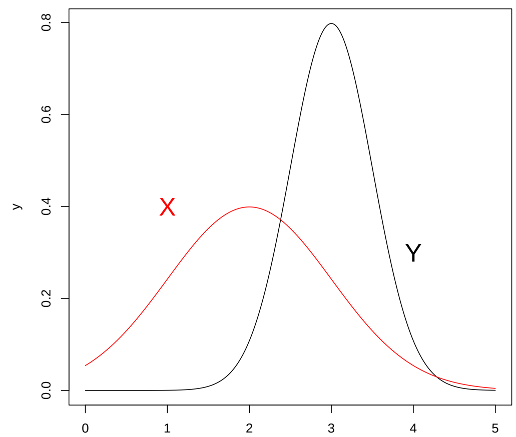
Řešení 1. zkoušková písemky NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 25.5.2022

1. (10 bodů) Na obrázku sou hustoty náhodných veličin X a Y. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y)$

(b) $\mathrm{var}(X) < \mathrm{var}(Y)$

(c) $X < Y$ skoro jistě (vysvětlete i, co tento výrok znamená)



Řešení: (a) Ano: Od pohledu jsou hustoty obou rozdělení symetrické okolo bodu, kde nabývají maxima. Proto se zdá, že $\mathbb{E}(X) = 2 < 3 = \mathbb{E}(Y)$.

(b) Ne: hustota X je víc „rozplizlá“, takže $\mathrm{var}(X) > \mathrm{var}(Y)$. Zdá se, že X i Y jsou obě normální rozdělení, a potom n.v. s větším rozptylem bude mít menší maximum hustoty. (Díky vzorci na přepočet mezi hustotou $N(0,1)$ a obecnou $N(\mu, \sigma^2)$.)

(c) Ne. Zde jste si mohli zadání dotvořit, nebylo totiž řečeno jaký je vztah X a Y. Pokud jsou nezávislé, tak je např. $P(Y < 3) = 0.5$ zatímco $P(X > 3) > 0$, a je tedy kladná pravděpodobnost, že $Y < 3 < X$.

Pokud bychom chtěli X a Y mít závislé, mohli bychom rozmýšlet, zda je možné vytvořit jejich sdruženou distribuci tak, aby bylo vždy $X < Y$. I zde by byla odpověď ne, ale není to vidět z obrázku hustoty.

POZOR Dotaz na pravděpodobnost jevu $X < Y$ se ptá na množinu elementárních jevů, tj. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}$. Toto je zcela jiná otázka než jaká je množina $t \in \mathbb{R}$ pro která $f_X(t) < f_Y(t)$! Je dobré o tomhle popřemýšlet, může vám to ujasnit, co to znamená náhodná veličina a jak ji popisujeme.

2. (10 bodů) Jezdíme celý rok (250 dní) načerno metrem. Každý den máme pravděpodobnost $p = 0.02$, že potkáme revizora. Označme X počet setkání s revizorem během roku.

(a) Jaká je střední hodnota $\mathbb{E}(X)$?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme přesně $\mathbb{E}(X)$ pokut? Napište přesný vzorec a odhadněte pomocí Poissonova rozdělení. (Ani v jednom případě nemusíte vyčíslovat.)

(c) Při každé kontrole se nad námi s pravděpodobností 1/3 revizor slituje a nechá nás jít bez pokuty. Označme Y počet dní, za které budeme platit pokutu. Určete $\mathbb{E}(Y)$, a $\mathrm{var}(Y)$.

Řešení: (a) $\mathbb{E}(X) = 250p = 5$

(b) Máme $X \sim Bin(250, p)$. Je tedy $P(X = 5) = \binom{250}{5} p^5 (1-p)^{245}$. Použijeme-li aproximaci pomocí $Pois(250p)$, dostaneme vzorec $e^{-5}5^5/5!$. Pro zajímavost (nebylo třeba vyčíslovat), přesná hodnota je 0.1772476, aproximace 0.1754674.

(c) $Y \sim Bin(250, \frac{2}{3}p)$. Pozor, to je něco jiného, než $Y' = \frac{2}{3}X$ (např. Y nabývá jen celočíselné hodnoty – a zejména má jiný rozptyl než Y')!

Je tedy $\mathbb{E}(Y) = np = 5 \cdot \frac{2}{3} = 10/3$ a $\mathrm{var}(Y) = np(1-p) = 10/3 \cdot (1 - \frac{2}{150})$.

3. (10 bodů) Nechť $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. (Předpokládejte $\lambda \neq \mu$.) Označme $Z = X + Y$.

(a) Určete hustotu n.v. Z.
(b) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}(Z)$.
(c) Určete rozptyl $\mathrm{var}(Z)$.

Řešení:

(a) Použijeme konvoluční vzorec. TODO Vyjde $f_Z(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}(e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})$.

(b) Použijeme vlastnosti exponenciálního rozdělení a linearitu střední hodnoty:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

Šlo by i použít hustotu spočítanou v části (a), ale bylo by to pracnější.

(c) Použijeme vlastnosti exponenciálního rozdělení a to, že rozptyl součtu nezávislých n8hodných veličin je roven součtu rozptylů.

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}.$$

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.

Nechť $F = F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X, Y. Nechť $F(1,1) = 0.6$, $F(0,1) = F(1,0) = 0.4$. Může být $F(0,0) = 0.1$? Jaká je nejmenší/největší možná hodnota $F(0,0)$?

(b) Definujte pojem rozptyl náhodné veličiny. Kdy je rozptyl roven 0?

Řešení: Definice viz skripta. Podle věty z přednášky je $P(0 < X \leq 1 \,\&\, 0 < Y \leq 1) = F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0)$. Odsud tedy $F(0,0) \geq 0.2$. Z monotonie platí $F(0,0) \leq 0.4$.

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se provádí test dobré shody.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o celkové střední hodnotě (neboli o výpočtu střední hodnoty rozborem případů). Stačí varianta pro diskrétní náhodné veličiny.