Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

2A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 1.6.2022

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, … (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701, $\Phi^{-1}(0.975)$ také nechte nevyčísleno.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, …, 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat dnes osobně nebo zítra přes Zoom. Písemky psané přes Zoom znamenají nutnost ústní části i pro potvrzení známky z písemky.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

$x \backslash y$	1	2	3
1	1/18	2/18	3/18
2	3/18	1/18	2/18
3	2/18	3/18	1/18

V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

(a) Určete $P(X = 2 \mid Y = 1)$ a $P(Y = 1 \mid X = 2)$.
(b) Rozhodněte, zda marginální rozdělení X je uniformní na $\{1, 2, 3\}$.
(c) Rozhodněte, zda marginální rozdělení Y je uniformní na $\{1, 2, 3\}$.
(d) Jsou X a Y nezávislé?
(e) Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
(f) Určete $\mathbb{E}(XY)$.
(g) Určete $\operatorname{cov}(X, Y)$.

2. (10 bodů) Házíme opakovaně běžnou šestistěnnou kostkou. Pokud padne jednička, musíme přestat, ale můžeme přestat i dříve. Když skončíme, dostaneme tolik korun, kolik jsme hodili při posledním hodu. Jakou strategii zvolit, abychom měli co největší střední hodnotu zisku? (Strategií myslíme pravidlo, při kterých hodech skončíme.)

3. (10 bodů) O naměřených hodnotách 6, 4, 10, 8, 10 předpokládáme, že pocházejí z náhodného výběru z rozdělení $Pois(\lambda)$.

(a) Navrhněte bodový odhad parametru λ momentovou metodou.
(b) Navrhněte bodový odhad parametru λ metodou maximální věrohodnosti.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem distribuční funkce náhodné veličiny. Rozhodněte zda platí pro náhodné veličiny X, Y některá z následujících implikací

- $X \leq Y$ skoro jistě $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ platí $F_X(t) \geq F_Y(t)$
- $X \leq Y$ skoro jistě $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ platí $F_X(t) \leq F_Y(t)$
- $\forall t \in \mathbb{R}$ platí $F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq Y$ skoro jistě

(b) Definujte pojem nezávislost několika nezávislých jevů. Mohou existovat tři jevy, které nejsou nezávislé, ale každé dva z nich nezávislé jsou?

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o konvolučním vzorci pro diskrétní náhodné veličiny.