10. cvičení z PSt — 25.–29.4.2022

Sdružená hustota

1. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
- (a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
- (b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
- (c) Jsou X, Y nezávislé?
- (d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

2. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- (b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
- (c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí PNS).

Podmíněná střední hodnota

3. Nechť X je n.v. s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{pro } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme A jev $\{X \geq 2\}$.
- (a) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $P(A)$, $f_{X|A}$ a $\mathbb{E}(X \mid A)$.
- (b) Označme $Y = X^2$. Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$.

Podmíněná hustota

4. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- (b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

5. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.
- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
- (b) Najděte marginální hustotu f_X.
- (c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.
- (d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

6. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)
- (a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- (b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- (c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

7. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y.
(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.

Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

Pro výpočty s funkcí Φ použijte tabulku z 5. cvičení nebo vhodný software, např. `https://t.ly/JRQ2`.

8. Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0,1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.
(a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.
(b) Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.
(c) Všimněte si, že lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n (nižší nároky na paměť).
(d) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, $\dots$?

9. Statistik chce odhadnout průměrnou výsku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \dots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.
(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?
(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že M_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99%?
(c) Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu $(1.4, 2.1)$. Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?

10. Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností $1/2$ a veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé.
(a) Vyjádřete S pomocí vhodné pravděpodobnosti výroku o X.
(b) Použijte CLV na odhad této pravděpodobnosti.
(c) Případně vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.