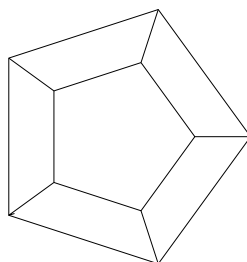


## Kombinatorika a grafy III – 2018/19

### 4.série

1. Určete stromovou šířku grafů  $C_n$  a  $K_{n,n}$ .
2. Určete stromovou šířku grafů pravidelného 4-stěnu, krychle a 8-stěnu.
3. Určete stromovou šířku Wagnerova grafu  $V_4$  a pětibokého hranolu (na obrázku).



4. Ukažte, že mřížka o rozměrech  $n \times n$  má stromovou šířku nejvýše  $n$ .
5. Ukažte, že mřížka o rozměrech  $n \times n$  má stromovou šířku rovnou  $n$ .
6. Buď  $G$  graf,  $T$  množina a  $(V_t)_{t \in T}$  systém podmnožin splňujících T1 a T2 z definice stromového rozkladu. Ukažte, že existuje strom na  $T$ , pro který je pravda i T3, právě tehdy, když lze prvky  $T$  označit jako  $t_1, t_2, \dots, t_n$  tak, že pro každé  $2 \leq k \leq n$  existuje  $j < k$  splňující

$$V_{t_k} \cap \bigcup_{i < k} V_{t_i} \subseteq V_{t_j}$$

(Novou podmínku je často snazší ověřit.)

7. Ukažte, že každý rovinný graf je minorem nějaké mřížky.
8. Může se rozdělením hrany stromová šířka grafu zvýšit? Může se snížit?
9. *Separace* grafu  $G$  je dvojice  $(U_1, U_2)$  grafů taková, že  $G = U_1 \cup U_2$ . Separace  $(U_1, U_2)$  a  $(W_1, W_2)$  jsou *kompatibilní*, pokud existují  $i, j \in \{1, 2\}$  tak, že  $U_i \subseteq W_j$  a  $U_{3-i} \supseteq W_{3-j}$ . Ukažte, že separace  $S_e = (U_1, U_2)$  z přednášky jsou pro různé volby hrany stromu kompatibilní.

(Těžší přídavek:) Naopak, pro každý systém  $\mathcal{S}$  kompatibilních separací grafu existuje stromový rozklad  $(\mathcal{V}, T)$  pro který je  $\mathcal{S} = \{S_e : e \in T\}$ .