Kombinatorické etudy 2 – ZS 2014/2015

1. (3.4) Zvolíme náhodnou permutaci čísel 1, 2, …, n. Jaká je pravděpodobnost, že 1 a 2 jsou ve stejném cyklu?

2. (6.28) Každý hranově 2-souvislý graf lze vytvořit z kružnice postupným přidáváním "uší". Pořádně: graf G je sjednocením $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$, kde G_1 je kružnice, a každý G_i ($i > 1$) je buď cesta, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společné jen své konce, nebo kružnice, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společný jeden vrchol.

3. (9.17) Graf nazveme *kriticky k-barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit k barvami ale ne $k-1$ barvami a zároveň po odebrání libovolného vrcholu lze zbylé vrcholy obarvit $k-1$ barvami.

(a) Které grafy jsou kriticky 3-barevné?
(b) Zkonstruujte kriticky 4-barevný graf se $4n$ vrcholy a alespoň n^2 hranami.
(c) Zkonstruujte kriticky 6-barevný graf s $2n$ vrcholy a minimálním stupněm alespoň n.

4. (11.35) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz minule.)

(a) Najděte takovou distribuci pro v_0 (počáteční stav), že distribuce v_k (k-tého kroku) je stejná pro všechna k (tzv. stacionární rozdělení).
(b) Dokažte, že stacionární rozdělení je právě jedno.
(c) Pokud G není bipartitní, tak (pro každé v_0) rozdělení v_k konverguje ke stacionárnímu rozdělení. Pro bipartitní grafy to neplatí (leda by G měl jen jeden vrchol).

5. (14.8) * Obarvíme každý z bodů v rovině jednou ze dvou barev. Předpokládejte, že existuje rovnostranný trojúhelník s hranou 1, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu (stručně: jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranou 1). Ukažte, že pro každé $a, b > 0$ splňující trojúhelníkovou nerovnost existuje jednobarevný trojúhelník s hranami 1, a, b. (Aby existoval vůbec nějaký takový trojúhelník, musí být $|a-b| < 1 < a+b$. Cílem je ukázat, že existuje i jednobarevný takový trojúhelnik.)

6. V kruhu stojí n očíslovaných ovcí. Přijde vlk a ovci 0 sežere. Pak vlk opakovaně hází korunou a podle výsledku popojde o políčko vpravo nebo vlevo. Když na novém místě je ovce, tak ji sežere. (Místa ovcí ale nemizí po sežrání ovce.) Jaká ovce má největší šanci, že bude sežraná až jako poslední?

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`