PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA 2
ZS 2013/14 soubor úloh č. 2

(**21.11.** nápověda, **28.11.** řešení)

Zápočet: ≥ 36 b, zkouška: ≥ 60 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Buď G souvislý graf. Uvážíme jeho náhodný podgraf $G_{1/2}$: každá hrana je nezávisle náhodně (s pravděpodobností 1/2) zachována nebo smazána; množina vrcholů zůstává stejná. Pravděpodobnost, že $G_{1/2}$ je souvislý označíme P.

   Dále uvažme náhodné obarvení hran G dvěma barvami (červeně a modře). Označme Q pravděpodobnost, že červený graf (s vrcholy $V(G)$) je souvislý a modrý graf taky.

   Jaký je vztah mezi Q a P^2? **3**

2. Dokažte druhou variantu Jansonovy věty než byla dokázána na přednášce: Za předpokladů jako na přednášce (včetně $\Pr[B_i] \leq \varepsilon$) ukažte, že

$$\Pr[\bigwedge_i \overline{B}_i] \leq M e^{\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\Delta}{2}} .$$

   3

3. Dokažte tvrzení, které jsme použili v důkazu Jansonovy nerovnosti:

$$\Pr[B_i \mid B_k \wedge \bigwedge_{j \in J} \overline{B}_j] \leq \Pr[B_i \mid B_k]$$

   1

   Umíte to i bez použítí korelační nerovnosti? **1**

4. Uvažme náhodný graf $G(n,p)$ pro $p = cn^{-\alpha}$. Určete, v závislosti na α, c a k, jaká je limita pravděpodobnosti, že $G(n,p)$ obsahuje K_k. **2**

5. Do čtvercové sítě s $n \times n$ čtverečky napíšeme uniformně náhodně čísla $\{1, \ldots, 6\}$. Čtvereček tvořený 3×3 (těsně sousedícími) čtverečky nazveme hezký, pokud jsou v něm všechna čísla stejná. Dokažte co nejmenší horní odhad na pravděpodobnost, že žádný čtvereček není hezký.

   (a) Použijte Jansonovu nerovnost. **2**

   (b) Bez použití Jansonovy nerovnosti. **2**

1 Použijte korelační nerovnost. Druhý experiment můžeme popsat taky tak, že jak $G_{1/2}$, tak $G - E(G_{1/2})$ jsou souvislé.

2 Postupujte stejně až po závěrečné nahrazení $1 + x \leq e^x$.

3 Podmínění B_k je totéž, jako předpokládat, že všechny prvky A_k určitě vezmeme, tj. položit $p_x = 1$ pro $x \in A_k$. Pro elementární důkaz si rozmyslete, že dokázat $\Pr[A \mid B] \leq \Pr[A]$ je totéž, jako $\Pr[A \mid \overline{B}] \geq \Pr[A]$. A to je v tomto případě poměrně snadné.

4 Použijte Jansonovu nerovnost. Pokud $\alpha = 2/(k-1)$ tak limita vyjde $\exp -c^{\binom{k}{2}}/k!$, pro jiné α je limita 0 nebo 1.

5 (a) Nemusíte počítat přesně, stačí, že pravděpodobnost, že jeden daný čtvereček je hezký, je nějaká konstanta v $(0, 1)$. (b) Uvažujte jenom devítinu čtverečků tak, aby jejich hezkost byly nezávislé jevy.