

Kombinatorické etudy 9 – LS 2013/2014

1. (3.20) Buď n pevné. Označme a_k počet permutací $[n]$ ($= \{1, \dots, n\}$), které mají právě k inverzí. Ukažte, že

$$\sum_k a_k x^k = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1}).$$

2. (4.28)

Určete počet perfektních párování žebříku Z_n (definovaného v druhé sadě úloh). Pokud možno pomocí Pfafiánu.

3. (9.32) Buď (P, \leq) částečně uspořádání. Definujeme graf G s vrcholy P a hranami $\{x, y\}$ pro $x < y$ nebo $x > y$.

- $\chi(G) = \omega(G)$
- $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$

4. (10.35) Buď G graf neobsahující K_{k+1} . Ukažte, že existuje k -barevný graf H s vrcholy $V(G)$ takový, že každý $v \in V(G)$ splňuje $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$. Odvoďte odsud Turánovu větu.

5. (14.14 – už to skoro máme!)*

- (a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n -prvkové množiny S , přičemž $n \geq N(k, t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \dots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.
- (b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k, r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n -prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \dots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/>