Kombinatorické etudy 5 – LS 2012/2013

1. (1.7 – zbývá z minula, první část umíme)
Dokažte následující vztahy ukazující, že Stirlingova čísla poslouží pro přechod mezi různými bázemi polynomů.

1. $\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x(x-1)\dots(x-k+1) = x^n$;

2. $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k = x(x-1)\dots(x-n+1)$;

3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } j = n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

2. (3.23)
(a) Kolik konvexních k-úhelníků lze vytvořit z vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud se dva k-úhelníky lišící se otočením považují za stejné?
(b) Kolik je k-obarvení vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud obarvení lišící se otočením považujeme za stejná?

3. (5.23) Buď G rovinný graf a G^* jeho duál. Ukažte, že G a G^* mají stejný počet koster.

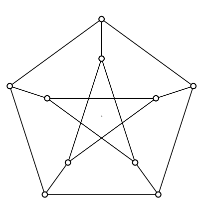
4. (6.6)
(a) Každý souvislý graf má vrchol, jehož odebrání nepokazí souvislost. Jak je to pro orientované silně souvislé grafy?
(b) Buď G souvislý graf bez třešně (dva vrcholy stupně 1 se společným sousedem). Ukažte, že z G lze odebrat dva sousední vrcholy a zachovat souvislost.
(c) Buď G souvislý graf, který není ani kružnice ani úplný graf. Ukažte, že z G lze odebrat dva nesousední vrcholy a zachovat souvislost.

5. (11.2 – zbývá z minula, první část umíme)
Uvažme regulární graf G (všechny stupně stejné), pro který známe jeho vlastní čísla. Jaká jsou vlastní čísla

1. doplňku $\bar{G}$;

2. hranového grafu $L(G)$?

3. Určete spektrum (vlastní čísla a jejich násobností) Petersenova grafu (viz obrázek).



6. (7.23 – zbývá z minula)
Buď M_0 libovolné párování v grafu G. Ukažte, že G má největší párování (tj. párování největší velikosti), které pokrývá všechny vrcholy M_0.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`