Kombinatorické etudy 4 – LS 2012/2013

1. (1.7) Dokažte následující vztahy ukazující, že Stirlingova čísla poslouží pro přechod mezi různými bázemi polynomů.

1. $\sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x(x-1)\dots(x-k+1) = x^n$;

2. $\sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^k = x(x-1)\dots(x-n+1)$;

3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop j \right] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } j = n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

2. (3.6)

Uvažme bankovní sejf s n trezory, ke každému patří jiný klíč. Někdo umístí do trezorů náhodně příslušných n klíčů (do každého trezoru jeden klíč) a pak trezory zavře. Pokud násilně otevřeme k trezorů, jaká je pravděpodobnost, že se získanými klíči budeme moci odemknout všechny ostatní?

Pro suchary: Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné permutaci cykly procházející čísly $1, 2, \dots, k$ pokrývají všechny body?

3. (5.9) Nechť G je digraf obsahující vrchol s výstupním stupněm aspoň 3. Ukažte, že G má sudý počet Eulerovských tahů.

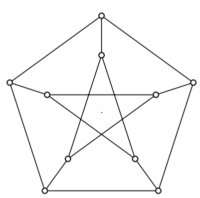
4. (6.5) Souvislý k-regulární bipartitní graf je 2-souvislý.

5. (11.2) Uvažme regulární graf G (všechny stupně stejné), pro který známe jeho vlastní čísla. Jaká jsou vlastní čísla

1. doplňku $\bar{G}$;

2. hranového grafu $L(G)$?

3. Určete spektrum (vlastní čísla a jejich násobností) Petersenova grafu (viz obrázek).



6. (7.23) Buď M_0 libovolné párování v grafu G. Ukažte, že G má největší párování (tj. párování největší velikosti), které pokrývá všechny vrcholy M_0.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`