5. cvičení z MA3 – 1.11.2011

1. Nalezněte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž platí
(a) $e^z = -2$,
(b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$,
(c) $\cos z = 2$,
(d) $\sin z = i$.

2. Nalezněte
(a) $\log(-ei)$,
(b) $\log(1-i)$.

3. Jaký je vztah mezi množinami $\log(z^2)$ a $2\log z$?

---

4. Zjistěte, zda následující funkce mají komplexní derivaci (a pokud ano, tak ji spočtěte).
(a) $\bar{z}$,
(b) z^2,
(c) $|z|^2$.
(d) $\Re z$,
(e) $\Re(z^2)$,
(f) $(\Re z)^2$.

---

5. Rozviňte v mocninnou řadu následující funkce
(a) e^{-z^2},
(b) $\cos^2 z$,
(c) $\frac{z}{9+z^2}$,
(d) $\frac{z}{(1+3z)^2}$,
(e) $\log\frac{1+x}{1-x}$ $(x \in \mathbb{R})$,
(f) $\operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$.

6. Catalanova čísla C_n splňují rekurentní vztah

$$C_0 = 1, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\,.$$

Položme $c(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n$.
(a) Jaký je poloměr konvergence této mocninné řady?
(b) Využijte rekurentního vztahu ke zjednodušení výrazu $c(z)^2$.
(c) Vyřešte kvadratickou rovnici pro $c(z)$.
(d) Budeme-li věřit tomu, že všude, kde je $c(z)$ (daná vzorcem z řešení rovnice) definovaná, tak i mocninná řada pro $c(z)$ konverguje, co odsud plyne o velikosti Catalanových čísel?