Kombinatorické etudy 8 – LS 2010/2011

1. (2.23) Spočtěte funkci $\mu(x, y)$ (zavedenou minule) pro částečně uspořádané množiny:

- všechny podmnožiny dané množiny (uspořádané inkluzí);
- zakořeněný strom ($x \leq y$ znamená, že cesta z kořene do y prochází x);
- čísla $1, 2, \ldots, n$ uspořádaná dělitelností.

2. (5.17)* (a) Vrcholy libovolného grafu G lze rozdělit do dvou částí tak, že každá část indukuje eulerovský podgraf (tj. graf se sudými stupni).

(b) Vrcholy libovolného grafu G lze rozdělit do dvou částí tak, že jedna část indukuje graf se sudými stupni a druhá graf s lichými stupni.

3. (9.7 – poslední šance)

- Kolik n-obarvení může graf mít? Přesněji: pro každé n, k rozhodněte, zda existuje graf G, který má právě k obarvení n barvami. (Návod: uvažte součin několika kopií K_n a ukažte, že jeho jediná obarvení jsou (pro $n \geq 3$) projekce.

(9.8 – taky jsme nedodělali) Buď S množina bodů. Pokud pro nějaký graf G je $S \subseteq V(G)$, tak každé obarvení G indukuje nějaký rozklad S. Vnořte S do grafu G tak, aby rozklady, určené všemi k-obarveními (pro dané $k \geq 3$) byly právě následující

- všechny rozklady kromě $\{S\}$;
- * daná množina $\{P_1, \ldots, P_N\}$.

Ve všech případech chceme, aby žádné jiné rozklady nevznikly. Pro jistotu: dáno k, S a množina rozkladů S. Chceme najít graf G.

4. (11.10 – zbylo z minula) Buďte G, H dva grafy s vrcholy $\{\varepsilon^i : i = 0, \ldots, p-1$, kde $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$, p prvočíslo. Nechť G i H jsou invariantní vůči rotaci o $2\pi/p$. Pokud G a H jsou isomorfní, tak existuje přirozené t, pro něž umocnění na t-tou je isomorfismus $G \to H$.

5. (12.6 – zbylo z minula) * Opět máme grupu Γ s n prvky, tentokrát $n \geq 6$. Najděte graf G s $2n$ vrcholy, že $Aut(G) \cong \Gamma$.

6. (15.9) Buďte G_1, G_2 dva 3-souvislé grafy a $\varphi : E(G_1) \to E(G_2)$ bijekce na hranách taková, že hrany tvořící kružnici v G_1 se zobrazí na hrany nějaké kružnice v G_2 a naopak.

(a) Ukažte, že φ zachovává sousednost hran.

(b) Ukažte, že G_1 a G_2 jsou isomorfní. (Neboli: 3-souvislé grafy lze zrekonstruovatz jejich matroidu.)